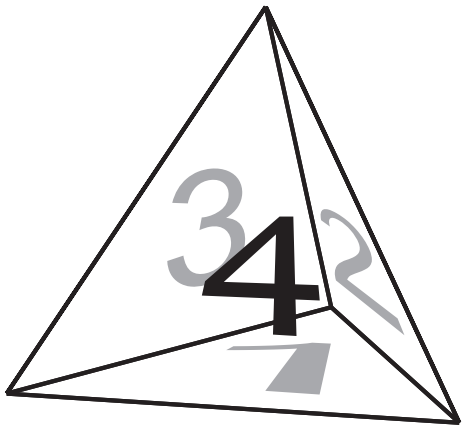
Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 9

Abgabe am Donnerstag, den 03.07.2025 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wie auf dem letzten Blatt spielen wir mit einem Tetraeder, dessen Seiten mit $1, \dots, 4$ nummeriert sind. Wir werfen den Tetraeder, bis die Summe der geworfenen Zahlen ≥ 3 ist. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Würfe.



   Bestimmen Sie die Verteilung von X und den Erwartungswert $E(X)$.

2. Wir werfen eine Münze bis zum ersten Mal Kopf kommt. Wenn beim n-ten Wurf zum ersten Mal Kopf kommt, dann gewinnen wir 2^n €. Da es auf der Welt nur etwa 2^{47} € Geld gibt, gilt diese Regel nur für $n \leq 47$ und für $n > 47$ gewinnen wir stets nur 2^{47} €. Was ist der erwartete Gewinn?

3. Beim Spiel Seven Eleven wirft der Spieler zwei (hoffentlich unmanipulierte) Würfel.

   - Ist die Augensumme 7 oder 11 gewinnt der Spieler.
   - Ist die Augensumme $2, 3$ oder 12 verliert er.
   - Ist die Augensumme $s \neq 7, 11$ und der Spieler hat nicht verloren, dann würfelt der Spieler weiter bis entweder Augensumme s oder 7 auftritt. Im ersten Fall gewinnt er, im zweiten Fall verliert er.

   Gewinnt der Spieler, bekommt er 1€, anderenfalls verliert er 1€.

   (a) Spielen Sie $N = 10$ Durchläufe des Spiels und berechnen Sie Ihren mittleren Gewinn.

   (b) Erstellen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum, der das Spiel beschreibt.

   (c) Was ist der erwartete Gewinn?

4. Für $n \geq 1$ beschreibe die Zufallsvariable

$$X : S_n \to \mathbb{N}_0$$

   die Anzahl der Fixpunkte einer zufällig gewählten Permutation $\sigma \in S_n$, also die Anzahl der $i \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sigma(i) = i.$$

(a) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$m : S_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

für die zufällige Wahl einer Permutation an, wobei wir annehmen, dass alle Permutationen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

(b) Bestimmen Sie für alle $\sigma \in S_3$ die Anzahl der Fixpunkte.

(c) Berechnen Sie für $n = 3$ die Verteilung von X und die erwartete Anzahl $E(X)$ von Fixpunkten einer zufällig gewählten Permutation.

(d) Sei nun $n = 10$. Schreiben Sie eine Funktion, die zufällig eine Permutation in S_n auswählt, und eine Funktion, die die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation zählt. Bestimmen Sie für $N = 1000$ Durchläufe ihres Programms den Mittelwert der Anzahl der Fixpunkte. Was ist Ihre Vermutung für $E(X)$?

5. (4 Zusatzpunkte) Schreiben Sie ein Programm, das das Spiel Seven Eleven implementiert. Bestimmen Sie für $N = 1000$ Durchläufe des Spiels Ihren mittleren Gewinn.