

Mathematik für Informatiker  
Kombinatorik, Stochastik und Statistik  
Übungsblatt 10

**Abgabe am Donnerstag, den 10.07.2025 bis 23:59 in OpenOlat.**

1. Sei  $\Omega$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Die Covarianz von Zufallsvariablen  $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E( (X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2)) )$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2).$$

2. Wir würfeln zweimal mit einem 6-seitigen Würfel. Die Zufallsvariablen

$$X_1 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto a \quad X_2 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto b$$

auf  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$  geben das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs an.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X_1$  und  $X_2$ .  
 (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X_1 + X_2$  und  $X_1 - X_2$ .  
 (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $(X_1 + X_2) \cdot (X_1 - X_2)$ .  
 (d) Bestimmen Sie die Covarianz  $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ .
3. (a) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

- (b) Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die zufällige Wahl einer Zahl aus der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  gilt

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

und

$$V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

4. In einer populären Zeitschrift wurde das folgende Problem gestellt und hat zu großen Diskussionen geführt: Bei einem Fernsehquiz gibt es 3 Türen, hinter zweien befindet sich eine Ziege, hinter der anderen ein Auto. Der Spieler kann eine Tür auswählen. Der Moderator öffnet dann eine der anderen beiden Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Moderator gibt dem Spieler nun die Möglichkeit seine Wahl unter den beiden noch geschlossenen Türen zu ändern. Der Spieler bekommt dann den Preis hinter der Tür seiner Wahl. Ist es von Vorteil, von Nachteil, oder egal für den Spieler, die Wahl seiner Tür zu ändern?

Hinweis: Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum für die Abfolge: Positionierung des Autos, Wahl der Tür durch den Spieler, Wahl der Tür durch den Moderator, und lesen Sie daraus die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die zwei Spielstrategien (Wechseln oder nicht Wechseln) ab.

5. (4 Zusatzpunkte) Schreiben Sie ein Programm, das das Spiel aus Aufgabe 4 simuliert. Vergleichen Sie die Simulation mit Ihrem theoretischen Ergebnis.