Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Präsenzübung

1. (a) Seien A, B und C endliche Mengen. Formulieren Sie die Aussage der Siebformel zur Bestimmung von $|A \cup B \cup C|$.

   (b) Bestimmen Sie die Anzahl aller $n \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq 1000$, die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind.

2. (a) Auf der Menge $\Omega = \mathbb{N}_0$ sei die Funktion

$$m: \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ j & \mapsto & \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^j \end{array}$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass m eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.

   (b) Auf dem Intervall $\Omega = [0, \infty[$ ist für $\lambda > 0$ die Funktion

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

3. Wir würfeln zweimal mit einem 6-seitigen Würfel. Die Zufallsvariablen

$$X_1 : \Omega \to \{1, \ldots, 6\},\ (a,b) \mapsto a \qquad X_2 : \Omega \to \{1, \ldots, 6\},\ (a,b) \mapsto b$$

   auf $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ geben das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs an. Die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

   beschreibt dann den Mittelwert der Augenzahlen.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X_1 + X_2$.

   (b) Bestimmen Sie $E(X_1 + X_2)$ und $V(X_1 + X_2)$.

   (c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|Y - \frac{7}{2}\right| \geq \frac{5}{2}\right)$$

   mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ab.

4. Aus einer Studie, wissen wir, dass $\frac{1}{1000}$ aller Menschen eine bestimmte Erkrankung haben. Wir führen einen Test auf die Erkrankung durch. Ist ein Mensch erkrankt, dann ist der Test mit Wahrscheinlichkeit $\frac{99}{100}$ positiv, anderenfalls ist der Test mit Wahrscheinlichkeit $\frac{95}{100}$ negativ. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit eines falsch positiven Resultats.