

Mathematik für Informatiker  
Kombinatorik, Stochastik und Statistik  
Übungsblatt 9

**Abgabe am Donnerstag, den 27.06.2024 bis 23:59 in OpenOlat.**

1. Wir würfeln zweimal mit einem 6-seitigen Würfel. Die Zufallsvariablen

$$X_1 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto a \quad X_2 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto b$$

auf  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$  geben das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs an.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X_1$  und  $X_2$ .  
 (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X_1 + X_2$  und  $X_1 - X_2$ .
2. Wir werfen 3-mal eine Münze, also  $\Omega = \{0, 1\}^3$ , wobei 0 für Kopf und 1 für Zahl steht.
- Die Zufallsvariable  $X_1$  sei 1, falls die Anzahl von Kopf gerade ist und 0 sonst.
  - Die Zufallsvariable  $X_2$  sei 1, falls die ersten beiden Würfe dasselbe Ergebnis haben und 0 sonst.
  - Die Zufallsvariable  $X_3$  gebe die Anzahl der Würfe von Zahl an.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X_1 \cdot X_3$  und  $X_2 \cdot X_3$ .

3. Wir spielen mit einem Würfel mit 6 Seiten. Auf die geworfene Augenzahl addieren wir 1 und multiplizieren das Ergebnis mit 2. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Ergebnisses.
4. (a) Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

- (b) Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die zufällige Wahl einer Zahl aus der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert und die Varianz von  $X$  gilt

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

und

$$V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}$$

5. (4 Zusatzpunkte) Sei  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$  mit Wahrscheinlichkeitsfunktion  $m$  gegeben durch  $m(\omega_i) := m_i$  mit Zahlen  $m_i \geq 0$ , die  $\sum_{i=1}^r m_i = 1$  erfüllen. Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $\Omega$  gegeben durch eine Prozedur, die  $\omega_i$  den Wert  $X(\omega_i)$  zuordnet.
- (a) Schreiben Sie ein Programm, das die Verteilung und den Erwartungswert von  $X$  berechnet.  
 (b) Erproben Sie Ihr Programm an dem zweimaligen Münzwurf

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

mit  $m(\omega) = \frac{1}{4}$ , und der Zufallsvariable  $X(a, b) = (a+b) \cdot (a-b)$ .

- (c) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 3 und 4 mit Hilfe Ihres Programms.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst alle Werte, die  $X$  auf  $\Omega$  annehmen kann, und dann deren Wahrscheinlichkeiten.