Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 8

Abgabe am Donnerstag, den 20.06.2024 bis 23:59 Uhr in OpenOlat.

1. Wir werfen eine Münze bis zum ersten Mal Kopf kommt. Wenn beim n-ten Wurf zum ersten Mal Kopf kommt, dann gewinnen wir 2^n €. Da es auf der Welt nur etwa 2^{47} € Geld gibt, gilt diese Regel nur für $n \leq 47$ und für $n > 47$ gewinnen wir stets nur 2^{47} €. Was ist der erwartete Gewinn?

2. Beim Spiel Seven Eleven wirft der Spieler zwei (hoffentlich unmanipulierte) Würfel.

   - Ist die Augensumme 7 oder 11 gewinnt der Spieler.
   - Ist die Augensumme $2, 3$ oder 12 verliert er.
   - Ist die Augensumme $s \neq 7, 11$ und der Spieler hat nicht verloren, dann würfelt der Spieler weiter bis entweder Augensumme s oder 7 auftritt. Im ersten Fall gewinnt er, im zweiten Fall verliert er.

   Gewinnt der Spieler, bekommt er 1€, anderenfalls verliert er 1€.

   (a) Spielen Sie $N = 10$ Durchläufe des Spiels und berechnen Sie Ihren mittleren Gewinn.

   (b) Schreiben Sie ein Programm, das das Spiel implementiert. Bestimmen Sie für $N = 1000$ Durchläufe des Spiels Ihren mittleren Gewinn.

3. (a) Erstellen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum, der das Spiel Seven Eleven aus Aufgabe 2 beschreibt.

   (b) Was ist der erwartete Gewinn?

4. Sei Ω eine endliche Menge, und $m : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge $M \subset \Omega$ definieren wir als

$$P(M) = \sum_{\omega \in M} m(\omega).$$

   Zeigen Sie, dass für $M_1, \ldots, M_n \subset \Omega$ gilt

$$P(M_1 \cup \ldots \cup M_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{|T|=k} P(M_T)$$

   mit

$$M_T = \bigcap_{i \in T} M_i$$

   für $T \subset \{1, ..., n\}$.

   Hinweis: Folgen Sie dem Beweis der Siebformel.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei Ω ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $m : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung für die

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 \cdot m(\omega)$$

absolut konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot m(\omega)$$

absolut konvergiert.

Hinweis: Spalten Sie die Summe

$$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot m(\omega)$$

in die Summanden mit $|X(\omega)| \leq 1$ und $|X(\omega)| > 1$ auf.