

Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 7

Abgabe am Donnerstag, den 13.06.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wir wollen die Menge

$$X = \{56, 64, 58, 61, 75, 86, 17, 62, 8, 50, 87, 99, 67, 10, 74\} \subset \mathbb{Z}$$

mit $n = 15$ Elementen mit Hilfe des Quicksort-Algorithmus sortieren.

- (a) Finden Sie einen Baum von Pivotelementen, sodass der Algorithmus angewendet auf X mindestens $\binom{n}{2}$ Vergleiche benötigt.
- (b) Durch welchen Baum von Pivotelementen können Sie weniger als $n \cdot \ln(n)$ Vergleiche erreichen?

Hinweis: Als Laufzeit bezeichnen wir hier die insgesamt notwendige Anzahl von Vergleichen.

2. Wir wollen, wie in der linearen Algebra definiert, das Produkt von zwei Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnen.

- (a) Argumentieren Sie, dass für $x \in \mathbb{R}^n$ die Multiplikation Matrix mal Vektor

$$A \cdot x = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{i=1..n}$$

entsprechend der angegebenen Formel Laufzeit in $O(n^2)$ hat.

- (b) Argumentieren Sie, dass die Multiplikation Matrix mal Matrix

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{i,k=1..n}$$

entsprechend der angegebenen Formel Laufzeit in $O(n^3)$ hat.

- (c) Gegeben seien Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entwickeln Sie eine Idee für einen Monte-Carlo-Algorithmus mit einseitigem Fehler der

$$A \cdot B = C$$

mit Laufzeit $O(n^2)$ testet.

Bemerkung: Als Laufzeit betrachten wir die Anzahl der Multiplikationen in \mathbb{R} .

3. (4 Zusatzpunkte)

- (a) Implementieren Sie den randomisierten Quicksort-Algorithmus.
- (b) Erproben Sie die asymptotische Laufzeit Ihrer Implementierung, indem Sie für verschiedene n eine Menge von zufällig erzeugten Zahlen $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{Z}$ sortieren.

Hinweise:

- Die Laufzeit messen wir, indem wir in der Implementierung die Anzahl der durchgeführten Vergleiche zählen.
- Die MAPLE-Funktion `rand(m)()` liefert eine Zufallszahl in $\{0, \dots, m-1\}$.