Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 4

Abgabetermin Freitag, den 24.05.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Ein zerstreuter Professor will 5 Geschenke auf 3 Päckchen verteilen. Nachdem er alle Möglichkeiten durchprobiert und aufgeschrieben hat, stellt er fest, dass er eines der Geschenke vergessen hat (er hat also nur 4 Geschenke auf 3 Päckchen verteilt). Wie kann er seinen Fehler korrigieren, ohne nochmals komplett von vorne anzufangen?

   (b) Sei $S(n, m)$ die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in m nichtleere Teilmengen. Zeigen Sie, dass

   $$S(n+1, m+1) = S(n, m) + (m+1) \cdot S(n, m+1)$$

   für alle $n, m \geq 0$.

   (c) Bestimmen Sie $S(5, 3)$.

   Tipp: Aufzählen aller Partitionen von $\{1, 2, 3\}$ in 2 Teilmengen: Bestimme alle Partitionen von $\{1, 2\}$ in 1 Menge $\{\{1, 2\}\}$ und füge $\{3\}$ hinzu:

   $$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$$

   und bestimme alle Partitionen von $\{1, 2\}$ in 2 Mengen $\{\{1\}, \{2\}\}$ und füge 3 auf alle möglichen Weisen zu einem der Partitionselemente hinzu:

   $$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$$
   $$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$$

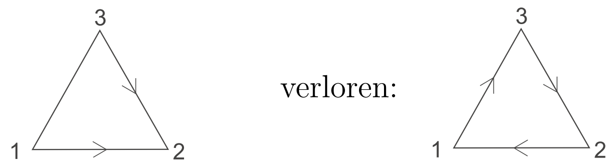
2. Entwickeln Sie aus der Rekursionsformel für die Bellschen Zahlen B_n

   $$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

   einen Algorithmus zum Aufzählen aller Partitionen einer endlichen Menge. Erläutern Sie Ihren Algorithmus an dem Beispiel einer 4-elementigen Menge.

3. (a) In einem Spiel zeichnet man in einem Dreieck auf jeder Kante zufällig einen Pfeil im oder gegen den Uhrzeigersinn oder keinen Pfeil (durch Würfeln mit einem dreiseitigen Würfel). Der Spieler verliert, wenn die Figur mindestens zwei Pfeile enthält und alle Pfeile in dieselbe Richtung zeigen, z.B.

   gewonnen: verloren:

   Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

   (b) Bestimmen Sie alle Halbordnungen auf $\{1, 2, 3\}$. Welche sind Totalordnungen?

4. (a) Bestimmen Sie alle reflexiven Relationen $R \subset M \times M$ auf $M = \{1, 2\}$.

   (b) Zeigen Sie: Auf einer n-elementigen Menge M gibt es genau $2^{n(n-1)}$ reflexive Relationen.

   (c) Sei M eine Menge mit n Elementen. Wieviele Totalordnungen gibt es auf M?

5. (4 Zusatzpunkte) Implementieren Sie aus dem kombinatorischen Beweis der Formel in Aufgabe 1.(b) ein rekursives Verfahren zur Bestimmung aller Partitionen einer n-elementigen Menge in m Teile.