Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 3

Abgabetermin Freitag, den 17.05.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

   (a) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

   (b) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

2. (a) Entwickeln Sie einen rekursiven Algorithmus, der für $n, m \in \mathbb{N}$ alle Zahlpartitionen von n in m positive Summanden bestimmt, d.h. alle Listen $(p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}^m$ mit

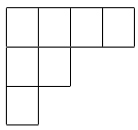
   $$n = p_1 + ... + p_m$$

   und

   $$n \geq p_1 \geq ... \geq p_m > 0.$$

   (b) Berechnen Sie damit alle Partitionen von 7 in höchstens 3 Summanden.

   Hinweis: Jede Zahlparitition $(p_1, ..., p_m)$ können wir als Young-Diagramm der Form

   schreiben, wobei in der i-ten Zeile linksbündig p_i Kästchen stehen.

3. Zeigen Sie: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es genau

   $$\binom{n-1}{m-1}$$

   geordnete Zahlpartitionen von n in m positive Summanden, d.h. Listen $(p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}^m$ mit

   $$n = p_1 + ... + p_m.$$

4. (a) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Anzahl B_n aller Partitionen einer n-elementigen Menge gilt $B_0 = 1$ und

   $$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

   (c) Berechnen Sie B_4.

5. (4 Zusatzpunkte) Implementieren Sie das rekursive Verfahren aus Aufgabe $2a$ zur Bestimmung aller Zahlpartitionen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ in m Teile.