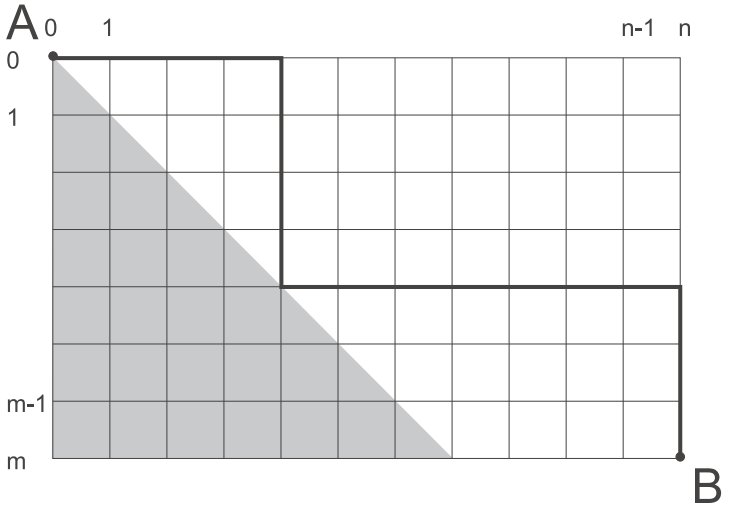
Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 2

Abgabetermin Freitag, den 10.05.2024 bis 23:59 Uhr in OpenOlat.

1. (a) Der Eintrittspreis für ein Kino sei 10€. Die Kinokasse wurde gerade geleert und es warten noch 7 Leute, 3 davon haben genau einen 20€-Schein und 4 genau einen 10€-Schein. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Warteschlange zu bilden, sodass der Kassierer stets genügend Wechselgeld hat? Wir nehmen dabei den Blickwinkel des Kassierers ein, d.h. betrachten Personen mit gleichwertigen Geldscheinen als ununterscheidbar.

   (b) In einem Stadtplan mit $n+1$ Avenues und $m+1$ Streets wollen wir von Punkt A nach Punkt B gehen. In dem Gebiet unterhalb der Winkelhalbierenden treiben Straßengangs ihr Unwesen (Punkte auf der Winkelhalbierenden sind also noch sicher).

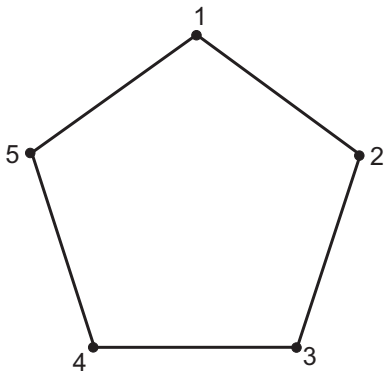


   Zeigen Sie, dass es für $n \geq m$ genau

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1}$$

   sichere kürzeste Wege von A nach B gibt.

2. Bestimmen Sie alle bijektiven Abbildungen $\{1,\dots,5\} \to \{1,\dots,5\}$, die sich geometrisch als Symmetrien (Drehungen oder Spiegelungen) des regelmäßigen Fünfecks



   interpretieren lassen.

3. (a) Ein zerstreuter Professor hat 4 verschiedene Briefe geschrieben, zugeklebt, aber nicht adressiert. Nun schreibt er zufällig die 4 Adressaten auf die Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Empfänger den für ihn bestimmten Brief bekommt?

   (b) Bestimmen Sie die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen einer n-elementigen Menge, d.h. die Anzahl der bijektiven Abbildungen $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ mit

$$f(x) \neq x \quad \text{für alle } x \in \{1, ..., n\}.$$

   Hinweis: Siebformel.

4. Bei einem Würfelspiel wird der Würfel n-mal geworfen und man gewinnt, wenn dabei alle Zahlen $1, \ldots, 6$ mindestens einmal auftreten.

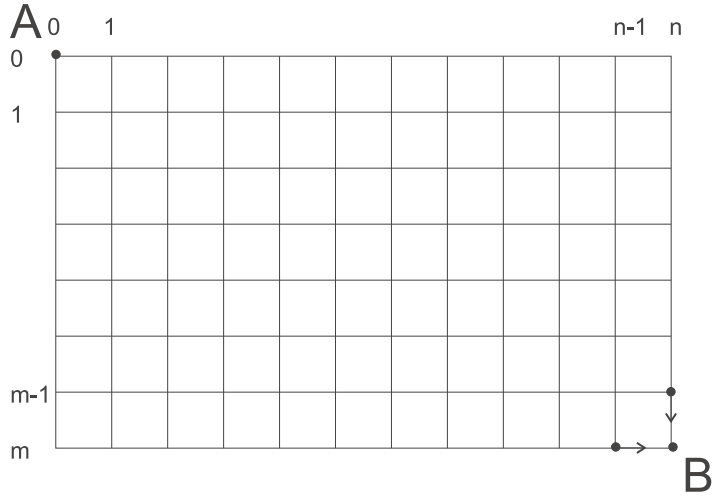
   (a) Wie groß muss n mindestens gewählt werden, damit die Gewinnwahrscheinlichkeit positiv ist? Welchen Wert nimmt sie dann an?

   (b) Wie groß darf die Bank n maximal wählen, damit sie eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als der Spieler hat? Welchen Wert hat die Gewinnwahrscheinlichkeit dann?

   (c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (b) anhand einer Stichprobe von 100000 Durchläufen des Spiels.
   Hinweis: Sie dürfen dazu den Computer verwenden. Eine Zufallszahl in $\{0, \ldots, n-1\}$ erhalten Sie z.B. mit der MAPLE-Funktion `rand(n)()`.

5. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Schreiben Sie ein rekursives Programm, das alle kürzesten Wege von A nach B in einem Stadtplan mit $n + 1$ Avenues und $m + 1$ Streets aufzählt. Codieren Sie Wege als Listen von Binärziffern.



   (b) Modifizieren Sie Ihr Programm so, dass es nur Wege aufzählt, die das Gebiet der Straßengangs unterhalb der Winkelhalbierenden vermeiden.

6. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein Körper und $c \in K$.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p, q \in K[X]$ gilt

$$(p \cdot q)(c) = p(c) \cdot q(c) \qquad (p + q)(c) = p(c) + q(c).$$

   (b) Folgern Sie aus dem Binomialsatz, dass für alle $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$