Mathematatik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 13

Abgabe am Donnerstag, den 25.07.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wir werfen 2-mal einen Würfel. Die Zufallsvariable

$$X_i : \Omega \to \{1, \dots, 6\},\ (a_1, a_2) \mapsto a_i$$

auf $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ gibt das Ergebnis des i-ten Wurfs an. Die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

beschreibt dann den Mittelwert der Augenzahlen.

(a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E(X_1)$ und $E(X_1 + X_2)$.

(b) Bestimmen Sie die Varianzen $V(X_1)$ und $V(Y)$.

(c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|Y - \frac{7}{2}\right| \geq \frac{5}{2}\right)$$

mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ab.

(d) Bestimmen Sie $P(\left|Y - \frac{7}{2}\right| \geq \frac{5}{2})$ exakt.

2. Ein Freund fordert sie auf, mit einer Münze zu spielen, die er zufällig in der Tasche hat. Er wettet auf Kopf, Sie auf Zahl. Falls Zahl kommt, erhalten Sie 1€, anderenfalls verlieren Sie 1€. Nach 100 Würfen haben Sie 30€ verloren und den Verdacht, dass die Münze manipuliert ist. Bevor Sie Ihren Freund zur Rede stellen, wollen Sie sich Ihrer Sache sicher sein.

(a) Wie oft haben Sie gewonnen und wie oft verloren?

(b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit 30€ oder mehr zu verlieren mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab.

(c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit auch mit der Hoeffding-Ungleichung ab.

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei den 100 Würfen genau 30€ verlieren, und die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 30€ oder mehr verlieren.

3. (a) Schreiben Sie ein Programm, das gleichverteilt 5 zufällige Zahlen $x_1, \dots, x_5$ im Intervall $[0, 1]$ bestimmt und deren Mittelwert

$$S = \frac{x_1 + \ldots + x_5}{5}$$

bildet.

(b) Führen Sie Ihr Programm 10000-mal aus und bestimmen Sie jeweils die relative Häufigkeit, dass S in einem der Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{100}\right[, \dots, \left[\frac{98}{100}, \frac{99}{100}\right[, \left[\frac{99}{100}, 1\right]$$

liegt. Erstellen Sie ein Diagramm mit den relativen Häufigkeiten.

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bremsleuchte Ihres Autos nach $t \geq 0$ Betriebsstunden defekt wird, ist beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$

mit $\lambda > 0$.

   (a) Bestimmen Sie für $\lambda = \frac{1}{1000}$ die Wahrscheinlichkeit

   $$\int_0^{t_0} p(t) dt$$

   dass die Bremsleuchte in den nächsten t_0 Betriebsstunden defekt wird.

   (b) Was ist die Defektwahrscheinlichkeit in den nächsten 10, 100 und 1000 Stunden?

5. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Schreiben Sie eine Funktion, die zufällig 0 oder 1 mit Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ zurückgibt. Wählen Sie mit Ihrer Funktion eine Stichprobe von 250 Zahlen und bestimmen Sie den Mittelwert.

   (b) Wir führen das Experiment aus (a) nun 5000-mal durch. Wie oft haben Sie eine Abweichung des Mittelwerts vom Erwartungswert von mindestens 0.1 bekommen?

   (c) Vergleichen Sie die Häufigkeit aus (b) mit der Schranke aus der Hoeffding-Ungleichung.

Hinweis: Die MAPLE-Funktion `rand(m)()` liefert eine Zufallszahl in $\{0, \dots, m-1\}$.