

Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 13

Abgabe am Donnerstag, den 25.07.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wir werfen 2-mal einen Würfel. Die Zufallsvariable

$$X_i : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a_1, a_2) \mapsto a_i$$

auf $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ gibt das Ergebnis des i -ten Wurfs an. Die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

beschreibt dann den Mittelwert der Augenzahlen.

- (a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $E(X_1)$ und $E(X_1 + X_2)$.
- (b) Bestimmen Sie die Varianzen $V(X_1)$ und $V(Y)$.
- (c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|Y - \frac{7}{2}\right| \geq \frac{5}{2}\right)$$

mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ab.

- (d) Bestimmen Sie $P(|Y - \frac{7}{2}| \geq \frac{5}{2})$ exakt.
2. Ein Freund fordert sie auf, mit einer Münze zu spielen, die er zufällig in der Tasche hat. Er wettet auf Kopf, Sie auf Zahl. Falls Zahl kommt, erhalten Sie 1€, anderenfalls verlieren Sie 1€. Nach 100 Würfeln haben Sie 30€ verloren und den Verdacht, dass die Münze manipuliert ist. Bevor Sie Ihren Freund zur Rede stellen, wollen Sie sich Ihrer Sache sicher sein.
- (a) Wie oft haben Sie gewonnen und wie oft verloren?
 - (b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit 30€ oder mehr zu verlieren mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab.
 - (c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit auch mit der Hoeffding-Ungleichung ab.
 - (d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei den 100 Würfeln genau 30€ verlieren, und die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 30€ oder mehr verlieren.
3. (a) Schreiben Sie ein Programm, das gleichverteilt 5 zufällige Zahlen $x_1, \dots, x_5$ im Intervall $[0, 1]$ bestimmt und deren Mittelwert

$$S = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5}$$

bildet.

- (b) Führen Sie Ihr Programm 10000-mal aus und bestimmen Sie jeweils die relative Häufigkeit, dass S in einem der Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{100}\right], \dots, \left[\frac{98}{100}, \frac{99}{100}\right], \left[\frac{99}{100}, 1\right]$$

liegt. Erstellen Sie ein Diagramm mit den relativen Häufigkeiten.

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bremsleuchte Ihres Autos nach $t \geq 0$ Betriebsstunden defekt wird, ist beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t)$$

mit $\lambda > 0$.

- (a) Bestimmen Sie für $\lambda = \frac{1}{1000}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\int_0^{t_0} p(t) dt$$

dass die Bremsleuchte in den nächsten t_0 Betriebsstunden defekt wird.

- (b) Was ist die Defektwahrscheinlichkeit in den nächsten 10, 100 und 1000 Stunden?

5. (4 Zusatzpunkte)

- (a) Schreiben Sie eine Funktion, die zufällig 0 oder 1 mit Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ zurückgibt. Wählen Sie mit Ihrer Funktion eine Stichprobe von 250 Zahlen und bestimmen Sie den Mittelwert.
- (b) Wir führen das Experiment aus (a) nun 5000-mal durch. Wie oft haben Sie eine Abweichung des Mittelwerts vom Erwartungswert von mindestens 0.1 bekommen?
- (c) Vergleichen Sie die Häufigkeit aus (b) mit der Schranke aus der Hoeffding-Ungleichung.

Hinweis: Die MAPLE-Funktion `rand(m)()` liefert eine Zufallszahl in $\{0, \dots, m-1\}$.