Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 11

Abgabe am Donnerstag, den 11.07.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wir werfen 3-mal eine Münze, also $\Omega = \{0,1\}^3$, wobei 0 für Kopf und 1 für Zahl steht.

   - Die Zufallsvariable X_1 sei 1, falls die Anzahl von Kopf gerade ist und 0 sonst.
   - Die Zufallsvariable X_2 sei 1, falls die ersten beiden Würfe dasselbe Ergebnis haben und 0 sonst.
   - Die Zufallsvariable X_3 gebe die Anzahl der Würfe von Zahl an.

   Bestimmen Sie die Covarianzen $\mathrm{Cov}(X_1, X_3)$ und $\mathrm{Cov}(X_2, X_3)$ und die Korrelationen $\mathrm{Corr}(X_1, X_3)$ und $\mathrm{Corr}(X_2, X_3)$.

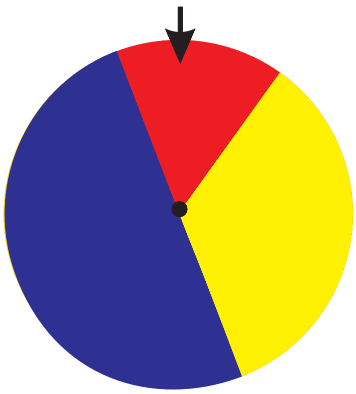
2. Bei einer Internetrecherche finden wir: Unter den Menschen, die Lungenkrebs bekommen, sind 16-mal mehr Raucher als Nichtraucher, 30% der Deutschen rauchen, 4% aller Deutschen erkranken in ihrem Leben an Lungenkrebs. Für eine Person ω sei $X_1(\omega) = 1$ falls die Person raucht und $X_1(\omega) = 0$ falls nicht, und $X_2(\omega) = 1$ falls die Person an Lungenkrebs erkrankt und $X_2(\omega) = 0$ falls nicht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2)$.

	1	0	n_2
1	?	?	
0	?	?	
n_1			

3. Wir spielen mit einem Würfel und werfen diesen zwei Mal. Wir gewinnen, falls die die Augensumme kleiner als 7 ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit noch zu gewinnen, unter der Voraussetzung, dass

   (a) der erste Wurf eine 1 geliefert hat,
   (b) der erste Wurf eine 3 geliefert hat,
   (c) der erste Wurf eine 6 geliefert hat,
   (d) der erste Wurf eine Zahl kleiner als 5 geliefert hat.

4. Basteln Sie eine rotierende Scheibe mit einem feststehenden Zeiger. Unterteilen Sie die Scheibe in 3 Tortenstücke, die den Umfang im Verhältnis 3 : 2 : 1 unterteilen und blau, gelb bzw. rot markiert sind.



   Drehen Sie die Scheibe 100-mal und bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten von rot, gelb und blau.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei Ω ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit positiver Varianz und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Corr}(X,\ a \cdot X + b) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$