

Mathematik für Informatiker
Kombinatorik, Stochastik und Statistik
Übungsblatt 10

Abgabe am Donnerstag, den 04.07.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Sei Ω ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Die Covarianz von Zufallsvariablen $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E((X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2)))$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2).$$

2. Seien A und B Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt unter der Bedingung, dass B eintritt. Zeigen Sie, dass die folgende Implikation gilt:

$$P(A | B) = P(A) \implies P(B | A) = P(B).$$

3. Wir würfeln zweimal mit einem 6-seitigen Würfel. Die Zufallsvariablen

$$X_1 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto a \quad X_2 : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 6\}, (a, b) \mapsto b$$

auf $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ geben das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs an.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $(X_1 + X_2) \cdot (X_1 - X_2)$.
- (b) Bestimmen Sie die Covarianz $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.
4. In einer populären Zeitschrift wurde das folgende Problem gestellt und hat zu großen Diskussionen geführt: Bei einem Fernsehquiz gibt es 3 Türen, hinter zweien befindet sich eine Ziege, hinter der anderen ein Auto. Der Spieler kann eine Tür auswählen. Der Moderator öffnet dann eine der anderen beiden Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Moderator gibt dem Spieler nun die Möglichkeit seine Wahl unter den beiden noch geschlossenen Türen zu ändern. Der Spieler bekommt dann den Preis hinter der Tür seiner Wahl. Ist es von Vorteil, von Nachteil, oder egal für den Spieler, die Wahl seiner Tür zu ändern?

Hinweis: Zeichnen Sie den Wahrscheinlichkeitsbaum für die Abfolge: Positionierung des Autos, Wahl der Tür durch den Spieler, Wahl der Tür durch den Moderator, und lesen Sie daraus die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die zwei Spielstrategien (Wechseln oder nicht Wechseln) ab.

5. (4 Zusatzpunkte) Schreiben Sie ein Programm, das das Spiel aus Aufgabe 4 simuliert. Vergleichen Sie die Simulation mit Ihrem theoretischen Ergebnis.