Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 9

Abgabetermin Samstag, den 13.01.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Schreiben Sie

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

   $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sowohl als Produkt disjunkter Zykel, als auch als Produkt von Transpositionen. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Darstellungen Ordnung und sign für σ, τ, $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

2. Welche Ordnungen treten bei den Elementen von S_6 auf?

3. Ein Graph ist ein Tupel (V, E) aus einer Menge V und einer Teilmenge E der Menge $\binom{V}{2}$ der zweielementigen Teilmengen von V. Dabei heisst V Menge der Vertices und E Menge der Kanten des Graphen.

   (a) Zeigen Sie: Es gibt genau $2^{\binom{n}{2}}$ Graphen auf n Vertices.

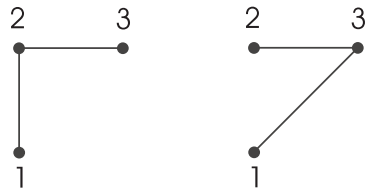
   (b) Bestimmen Sie alle Graphen auf $n = 4$ Vertices.

4. Zwei Graphen (V_1, E_1) und (V_2, E_2) heißen isomorph, wenn eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ existiert, sodass

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2$$

   für alle $v, w \in V_1$.

   (a) Sind die folgenden Graphen isomorph? Falls ja, geben Sie einen Isomorphismus an.



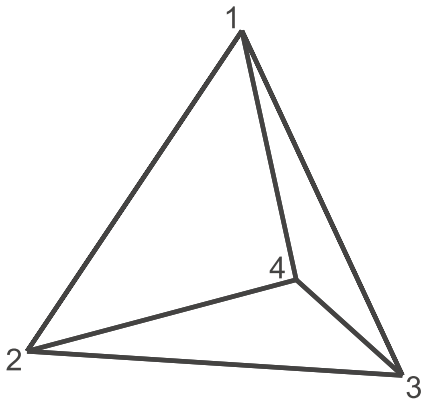
   (b) Die S_n operiert auf der Menge der Graphen mit n Vertices durch Permutation der Vertices. Zeigen Sie: Zwei Graphen sind isomorph genau dann, wenn sie in derselben Bahn liegen.

   (a) Bestimmen Sie die Bahnen der Operation der S_3 auf der Menge M der Graphen mit 3 Vertices. Wählen Sie für jede Bahn einen Repräsentanten und bestimmen Sie jeweils dessen Stabilisator.

   (b) Zeigen Sie, dass es genau 4 Isomorphieklassen von Graphen mit 3 Vertices gibt.
   Hinweis: Bahnenformel.

5. (4 Zusatzpunkte)

(a) Schreiben Sie jedes Element der S_4 als Produkt disjunkter Zykel.

(b) Ordnen Sie jedem $\sigma \in S_4$ eine Partition von 4 zu (d.h. eine Summe $4 = p_1 + ... + p_r$ mit $p_i \geq 1$). Diese Partition nennt man Zykeltyp von σ.

(c) Interpretieren Sie jeden Zykeltyp geometrisch, indem Sie die S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders auffassen.