# Mathematik für Informatiker
# Algebraische Strukturen
# Übungsblatt 8

**Abgabetermin Samstag, den 23.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.**

1. (a) Lässt sich bei dem bekannten Schiebespiel folgende Konfiguration

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

in die Ausgangsstellung

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

überführen?

Hinweis: sign ist ein Gruppenhomomorphismus, verwenden Sie Aufgabenteil (b).

(b) Sei $\tau \in S_n$, $n \geq 2$ eine Transposition. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

2. Sei $G$ eine Gruppe und $g \in G$. Die Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ von $g$ ist die Ordnung der von $g$ erzeugten zyklischen Gruppe

$$\langle g \rangle = \left\{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Seien $g, h \in G$ mit $g \circ h = h \circ g$ und $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$. Zeigen Sie:

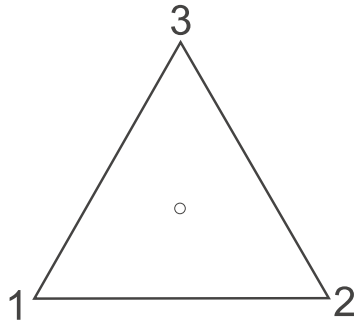
$$\operatorname{ord}(g \circ h) = \operatorname{kgV}\left(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)\right).$$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Ordnung von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

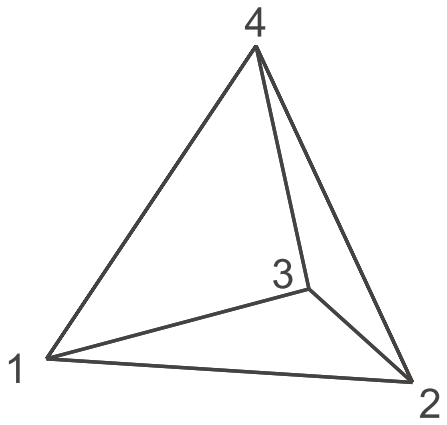
$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

2. Sei $G = S_3$ die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks




Bestimmen Sie alle Untergruppen von $G$.

3. Sei $G = S_4$ die Symmetriegruppe des Tetraeders




   (a) Bestimmen Sie alle Elemente von $G$ als Permutationen der Ecken,

   (b) Interpretieren Sie die Elemente von $S_4$ geometrisch als Symmetrien.

4. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & a \circ b \circ a^{-1} \end{array}$$

   definiert eine Operation von $G$ auf $G$ von links, die Konjugation.

   (b) Die Bahn von $b \in G$

$$b^G := \left\{ a \circ b \circ a^{-1} \mid a \in G \right\}$$

   heißt Konjugationsklasse von $b$. Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der $S_3$.