Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 8

Abgabetermin Samstag, den 23.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Lässt sich bei dem bekannten Schiebespiel folgende Konfiguration

2	1	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

in die Ausgangsstellung

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

überführen?

Hinweis: sign ist ein Gruppenhomomorphismus, verwenden Sie Aufgabenteil (b).

(b) Sei $\tau \in S_n$, $n \geq 2$ eine Transposition. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

2. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ von g ist die Ordnung der von g erzeugten zyklischen Gruppe

$$\langle g \rangle = \left\{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Seien $g, h \in G$ mit $g \circ h = h \circ g$ und $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$. Zeigen Sie:

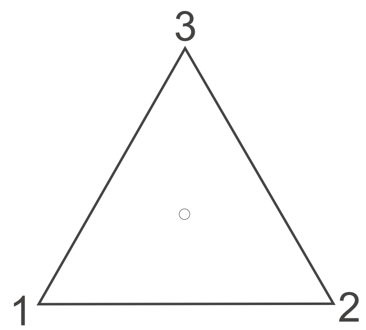
$$\operatorname{ord}(g \circ h) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(g), \operatorname{ord}(h)).$$

(b) Bestimmen Sie jeweils die Ordnung von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

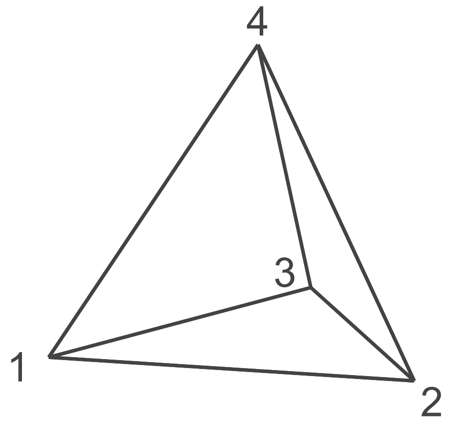
$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

2. Sei $G = S_3$ die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks



Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.

3. Sei $G = S_4$ die Symmetriegruppe des Tetraeders



(a) Bestimmen Sie alle Elemente von G als Permutationen der Ecken,

(b) Interpretieren Sie die Elemente von S_4 geometrisch als Symmetrien.

4. (4 Zusatzpunkte)

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & a \circ b \circ a^{-1} \end{array}$$

definiert eine Operation von G auf G von links, die Konjugation.

(b) Die Bahn von $b \in G$

$$b^G := \left\{ a \circ b \circ a^{-1} \mid a \in G \right\}$$

heißt Konjugationsklasse von b. Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der S_3.