Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 7

Abgabetermin Samstag, den 16.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der simultanen Kongruenzen

$$x \equiv 8 \bmod 10$$
$$x \equiv -1 \bmod 21$$

und beschreiben Sie die Lösungsmenge als eine Restklasse.

2. (a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \geq 1$ und $\mathrm{ggT}\,(a, b) = 1$, dann ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/\,(a \cdot b) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b \\ \overline{x} & \longmapsto & (\overline{x}, \overline{x}) \end{array}.$$

ein Isomorphismus. Hinweis: Chinesischer Restsatz.

(b) Bestimmen Sie das Urbild von $(8 + 10\mathbb{Z}, -11 + 21\mathbb{Z})$ unter dem Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/210 \cong \mathbb{Z}/10 \times \mathbb{Z}/21.$$

3. (a) Implementieren Sie (auch als Pseudocode) die Berechnung des Signums

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sign}: & S_n & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ & \sigma & \longmapsto & \mathrm{sign}\,(\sigma) = \prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

(b) Erproben Sie Ihr Programm an den Beispielen aus Aufgabe 4.

4. (a) Bestimmen Sie

$$\mathrm{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie für die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$, und jeweils das Signum sign.

5. (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass sign für $n \geq 2$ ein Gruppenepimorphismus ist. Dabei sei die Verknüpfung $\cdot$ auf $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ von der Multiplikation von ganzen Zahlen geerbt.