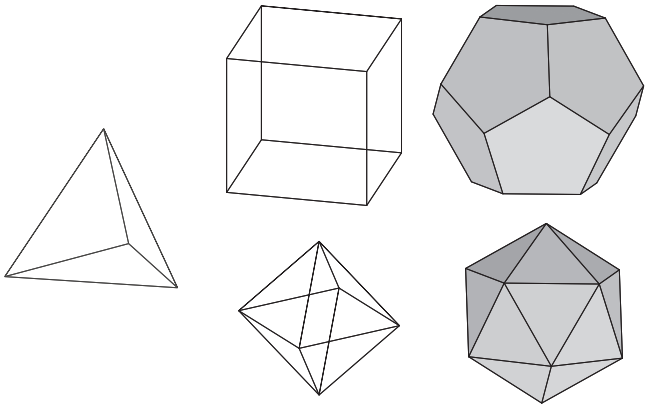
Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 6

Abgabetermin Samstag, den 09.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Basteln Sie Papiermodelle der Platonischen Körper Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder (bitte in die Übung mitbringen).



2. Sei G eine Menge zusammen mit einer Verknüpfung $\circ$, die folgende Axiome erfüllt:

   (G1) Assoziativität: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \ \forall a, b, c \in G$.

   (G2') Es existiert ein linksneutrales Element, d.h. ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \ \forall a \in G$.

   (G3') Existenz des Linksinversen, d.h. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \circ a = e$.

   Zeigen Sie:

   (a) Für $a, b \in G$ gilt: Ist $a \circ b = e$, dann ist auch $b \circ a = e$.

   (b) Es ist $a \circ e = a \ \forall a \in G$.

   (c) Das neutrale Element ist eindeutig.

   (d) Die Inversen sind eindeutig.

   (e) Für $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

   (f) Für $a \in G$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

3. (a) Berechnen Sie für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

   die Permutationen σ^2, τ^2, $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$.

   (b) Bestimmen Sie alle Transpositionen der symmetrischen Gruppe S_4.

4. Implementieren Sie (auch in Form von Pseudocode)

   (a) das Sieb des Eratosthenes und

   (b) die Faktorisierung von ganzen Zahlen mittels Probedivision.

   (c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 116338867864982351.

5. (4 Zusatzpunkte) Schreiben Sie (z.B. mit Hilfe Ihrer Implementierung des erweiterten Euklidischen Algorithmus oder der MAPLE-Funktion igcdex) eine Prozedur, die die Lösungsmenge der simultanen Kongruenzen

$$x \equiv a_1 \bmod n_1$$
$$x \equiv a_2 \bmod n_2$$

für $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\mathrm{ggT}(n_1, n_2) = 1$ bestimmt.

Erweitern Sie die Funktionalität Ihrer Implementierung so, dass sie auch im Fall nicht teilerfremder n_1, n_2 korrekt funktioniert.