Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 5

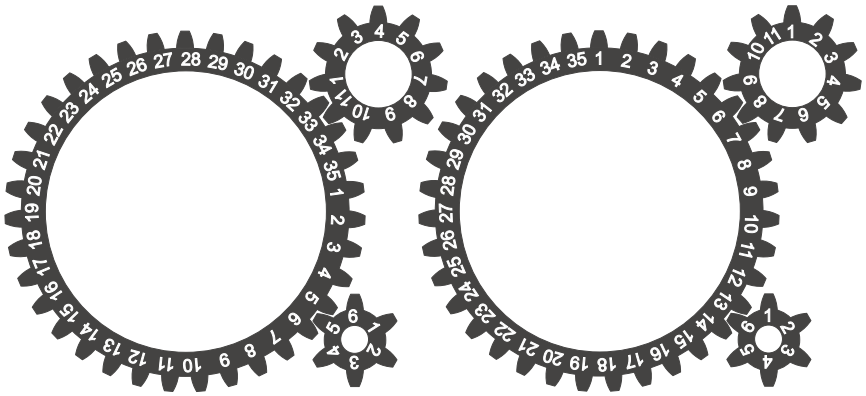
Abgabetermin Samstag, den 02.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Implementieren Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus (auch in Form von Pseudocode). Testen Sie Ihre Implementierung an Beispielen.

   (b) Kürzen Sie
   $$\frac{90297278063}{18261358091}$$

2. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen
   $$\begin{aligned} x &\equiv 2 \bmod 3 \\ x &\equiv 2 \bmod 7 \\ x &\equiv 3 \bmod 10 \end{aligned}$$

3. Lassen sich die beiden Konfigurationen von Zahnrädern



   durch Drehung ineinander überführen? Falls ja, um wieviele Schritte muss man dafür drehen?

4. (a) Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Zeigen Sie: Die simultanen Kongruenzen
   $$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \bmod n_1 \\ x &\equiv a_2 \bmod n_2 \end{aligned}$$
   sind genau dann lösbar, wenn
   $$a_1 - a_2 \equiv 0 \bmod \mathrm{ggT}\,(n_1, n_2)\,.$$
   Die Lösung ist eindeutig modulo dem $\mathrm{kgV}\,(n_1, n_2)$.

   (b) Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen
   $$\begin{aligned} x &\equiv 1 \bmod 108 \\ x &\equiv 25 \bmod 80 \end{aligned}$$

5. (4 Zusatzpunkte) Überprüfen Sie den Primzahlsatz experimentell:

   (a) Schreiben Sie eine Prozedur, die

   $$\pi(x) = |\{p \leq x \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}|$$

   für $x > 0$ berechnet.

   (b) Vergleichen Sie die Funktion $\frac{\pi(x)}{x}$ mit $\frac{1}{\ln(x)-a}$ für $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, insbesondere für große x. Für welches a erhalten Sie die beste Approximation?

   (c) Stellen Sie Ihre Beobachtungen graphisch dar.

   Hinweis: Verwenden Sie z,B, die MAPLE-Funktion `nextprime`.