

Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 5

Abgabetermin Samstag, den 02.12.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Implementieren Sie den erweiterten Euklidischen Algorithmus (auch in Form von Pseudocode). Testen Sie Ihre Implementierung an Beispielen.

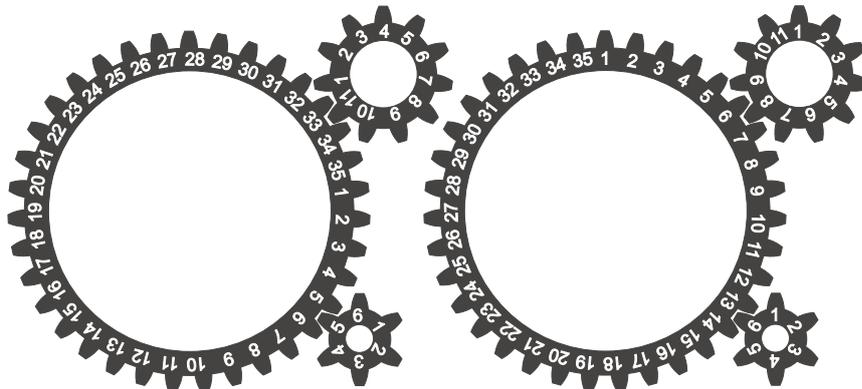
- (b) Kürzen Sie

$$\frac{90297278063}{18261358091}$$

2. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3} \\x &\equiv 2 \pmod{7} \\x &\equiv 3 \pmod{10}\end{aligned}$$

3. Lassen sich die beiden Konfigurationen von Zahnrädern



durch Drehung ineinander überführen? Falls ja, um wieviele Schritte muss man dafür drehen?

4. (a) Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$. Zeigen Sie: Die simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\x &\equiv a_2 \pmod{n_2}\end{aligned}$$

sind genau dann lösbar, wenn

$$a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod{\text{ggT}(n_1, n_2)}.$$

Die Lösung ist eindeutig modulo dem kgV (n_1, n_2) .

- (b) Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{108} \\x &\equiv 25 \pmod{80}\end{aligned}$$

5. (4 Zusatzpunkte) Überprüfen Sie den Primzahlsatz experimentell:

(a) Schreiben Sie eine Prozedur, die

$$\pi(x) = |\{p \leq x \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}|$$

für $x > 0$ berechnet.

(b) Vergleichen Sie die Funktion $\frac{\pi(x)}{x}$ mit $\frac{1}{\ln(x)-a}$ für $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, insbesondere für große x . Für welches a erhalten Sie die beste Approximation?

(c) Stellen Sie Ihre Beobachtungen graphisch dar.

Hinweis: Verwenden Sie z.B. die MAPLE-Funktion `nextprime`.