Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 3

Abgabetermin Samstag, den 18.11.2023 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Seien M, N endliche Mengen mit $|M| = |N|$ und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) f ist bijektiv,

   (b) f ist injektiv,

   (c) f ist surjektiv.

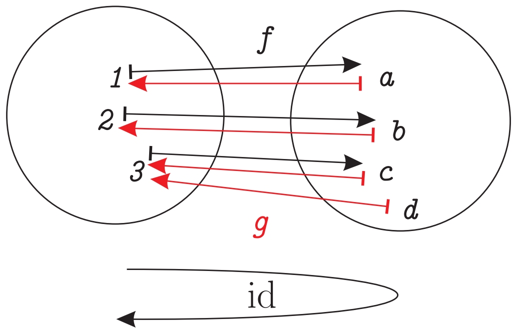
2. Seien $M, N, L \neq \emptyset$ Mengen und $f : M \to N$ und $h : N \to L$ Abbildungen. Zeigen Sie:

   (a) Sind f und h injektiv, dann ist auch $h \circ f$ injektiv.

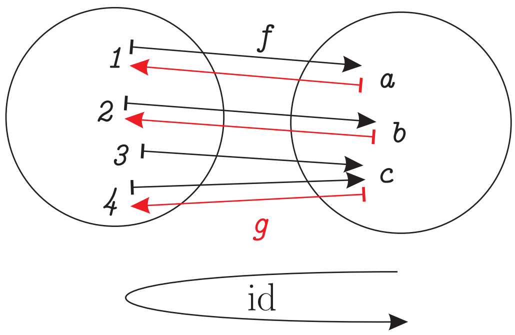
   (b) Sind f und h surjektiv, dann ist auch $h \circ f$ surjektiv.

3. Seien $M, N \neq \emptyset$ Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

   (a) f ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

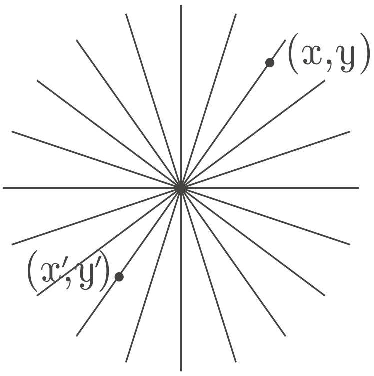


   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.



4. Betrachten Sie die Menge $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ aller Punkte der reellen Ebene ohne den 0-Punkt.

   Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ durch $(x,y) \sim (x',y')$ genau dann, wenn es eine Gerade durch den Nullpunkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ gibt, auf der sowohl der Punkt (x,y) als auch der Punkt (x',y') liegt.



   (a) Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

   (b) Finden Sie eine geometrische Darstellung der Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$, indem Sie in jeder Äquivalenzklasse einen geeigneten Repräsentanten in M wählen.

   Hinweis: Sie können Aufgabenteil (b) auch zeichnerisch lösen.

5. (4 Zusatzpunkte) Seien die Zahlen $1, ..., 101$ in irgendeiner Reihenfolge gegeben. Zeigen Sie, dass 11 davon aufsteigend oder absteigend sortiert sind.

   Hinweis: Betrachten Sie für jedes Element der Zahlenfolge die Längen der dort beginnenden aufsteigenden bzw. absteigenden Teilfolgen, und verwenden Sie das Schubfachprinzip. Beachten Sie, dass nicht gefordert ist, dass die 11 Zahlen direkt aufeinanderfolgen.