Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Ferienblatt 14

Abgabetermin für Extrapunkte bis Montag, den 19.02. bis 23:59 in OpenOlat.

0. Ergänzen Sie Ihren Klausurmerkzettel um eine Zusammenfassung bis Kapitel 6 (Abgabe als Fotokopie). Notieren Sie sich auch Ihre Fragen und stellen Sie diese in der Probeklausur.

1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

   lösbar? Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge.

2. Bestimmen Sie jeweils die Inverse von

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/3)^{3\times 3}.$$

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A durch Weglassen von Spalten.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

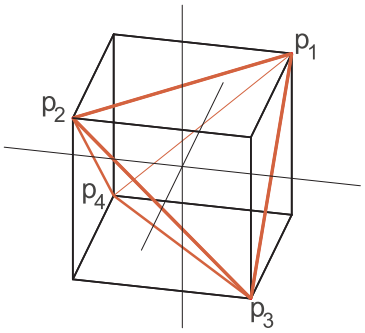
   (a) Berechnen Sie eine Basis von Kern und Bild von A.

   (b) Berechnen Sie die Lösungsmenge $L(A, b) \subset \mathbb{Q}^4$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für $x \in \mathbb{Q}^4$.

   (c) Bestimmen Sie das Urbild von b unter dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^4/\operatorname{Ker}(A) &\longrightarrow \operatorname{Bild}(A) \\ \overline{x} &\longmapsto A \cdot x. \end{aligned}$$

5. Betrachten Sie den Tetraeder T



mit den Ecken

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$p_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jede Symmetrie von T ist ein Homomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Geben Sie für die Drehung mit Wirkung $(1, 2, 3) \in S_4$ auf den Ecken und für die Drehspiegelung $(1, 2, 3, 4)$ jeweils die darstellende Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ an.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungsystem zur Bestimmung der Einträge der Matrix auf.