Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 13

Abgabetermin Samstag, den 10.02.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Wir betrachten den durch Ableitung gegebenen $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{Q}\left[x\right]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{Q}\left[x\right]_{\leq 2}$$

   (a) Bestimmen Sie bezüglich der Basen

$$\Omega = (1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ (x-1)^3) \quad \text{und} \quad \Delta = (1,\, x,\, x^2)$$

   den Homomorphismus

$$\varphi = \mathrm{co}_\Delta \circ \frac{d}{dx} \circ \mathrm{lc}_\Omega : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$$

   indem Sie die Bilder der Einheitsvektoren angeben.

   (b) Berechnen Sie die Ableitung des Polynoms

$$p = 2(x-1)^3 + 3(x-1) + 7$$

   direkt und mittels der Formel $\frac{d}{dx} = \mathrm{lc}_\Delta \circ \varphi \circ \mathrm{co}_\Omega$.

2. Zeigen Sie: Für jedes $b \in \mathbb{R}$ bilden die $d+1$ Polynome

$$1, (x-b), (x-b)^2, ..., (x-b)^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d}$$

   eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.

3. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ der endliche Körper mit p Elementen.

   (a) Zeigen Sie: Jeder d-dimensionale $\mathbb{F}_p$-Vektorraum V hat genau p^d Elemente.

   (b) Sei $V = (\mathbb{F}_2)^3$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie alle Elemente des Untervektorraums $\langle v_1, v_2 \rangle \subset V$ und alle Vektoren $v_3 \in V$, sodass v_1, v_2, v_3 eine Basis von V bilden.

   (c) Wieviele verschiedene Basen von $(\mathbb{F}_p)^d$ gibt es? Geben Sie eine Formel an.

4. (a) Berechnen Sie eine Basis des Lösungsraums von

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 - 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

   als Untervektorraum von $\mathbb{Q}^5$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 &= -7 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 - 4x_5 &= -7 \end{aligned}$$

5. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein Körper, und seien $U, V \subset K^n$ Untervektorräume gegeben durch Basen $u_1, ..., u_s$ von U und $v_1, ..., v_t$ von V.

   (a) Zeigen Sie, dass $U \cap V \subset K^n$ ein Untervektorraum ist.

   (b) Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $U \cap V$.

   (c) Wenden Sie Ihr Verfahren an auf die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{Q}^4$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$