Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 12

Abgabetermin Samstag, den 03.02.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Transformieren Sie das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 8x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \end{array}$$

   in ein äquivalentes System in Zeilenstufenform.

   (b) Transformieren Sie auf ein äquivalentes System in reduzierter Zeilenstufenform.

   (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $V \subset \mathbb{Q}^5$ des obigen Gleichungssystems.

2. Sei K ein Körper und $a_1, \dots a_n, b \in K$. Beschreiben Sie ein Verfahren, um aus der Lösungsmenge der Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - bx_{n+1} = 0$$

   die Lösungsmenge der Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

   zu bestimmen.

3. Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{Q}$ die Lösungsmenge $V_t \subset \mathbb{Q}^3$ von

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (t-1)\cdot x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (t-2)\cdot x_2 & + & (t^2-t+4)\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

4. Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K.

   (a) Zeigen Sie: Komponentenweise Summen und K-Vielfache von Lösungen sind wieder Lösungen.

   (b) Finden Sie zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{Q}^4$ sodass sich jede Lösung $x \in \mathbb{Q}^4$ des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

   als Linearkombination

$$x = \alpha \cdot v + \beta \cdot w$$

   mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ schreiben lässt.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei

$$\begin{aligned} l_1 &= a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ l_r &= a_{r,1}x_1 + ... + a_{r,n}x_n = 0 \end{aligned}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{Q}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Schreiben Sie jeweils eine Funktion, die

(a) das System in Zeilenstufenform bringt.

(b) das System in reduzierte Zeilenstufenform bringt.

(c) die Lösungsmenge in parametrischer Darstellung beschreibt.