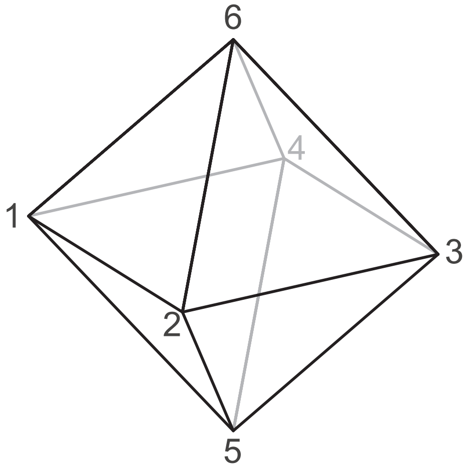
Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 10

Abgabetermin Samstag, den 20.01.2024 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Sei $G = \mathrm{Sym}\,(O)$ die Symmetriegruppe des Oktaeders O. Durch Nummerieren der Ecken



können wir G als Untergruppe der S_6 auffassen.

   (a) Bestimmen Sie die Gruppenordnung von G mit Hilfe der Bahnformel.

   (b) Finden Sie Erzeuger von G und beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (c) Bestimmen Sie alle Elemente von G.

   Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Befehle `Group`, `Order` und `Elements`.

2. Ein Ring ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : R \times R \longrightarrow R,\ (a, b) \longmapsto a + b$$
$$\cdot : R \times R \longrightarrow R,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

wobei $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist, die Multiplikation assoziativ ist, und $+$ und $\cdot$ distributiv sind.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in R$ gilt

$$0x = x0 = 0 \qquad (-x)\,y = x\,(-y) = -xy \qquad (-x)\,(-y) = xy$$

   (b) Stellen Sie die Verknüpfungstafeln der Multiplikation und Addition des Rings $\mathbb{Z}/10$ mit

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b} \quad \text{und} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$$

   auf. Welche Elemente von $\mathbb{Z}/10$ haben ein multiplikativ Inverses? Überprüfen Sie, dass diese Elemente bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden.

3. In einem kommutativen Ring R ist $a \in R$ eine Einheit, wenn a multiplikativ invertierbar ist. Weiter heißt a Nullteiler von R, wenn ein $x \in R\backslash\{0\}$ existiert mit

$$x \cdot a = 0.$$

   (a) Zeigen Sie: In einem endlichen Ring ist jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

   (b) Ein Integritätsring ist ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, der außer 0 keine Nullteiler hat. Zeigen Sie, dass in einem Integritätsring R die Kürzungsregel gilt: Sind $a, b, c \in R$ und $c \neq 0$, dann

$$a \cdot c = b \cdot c \implies a = b.$$

4. Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt Normalteiler, wenn für die Nebenklassen gilt

$$gH = Hg \text{ für alle } g \in G,$$

d.h.

$$\{g \circ h \mid h \in G\} = \{h \circ g \mid h \in G\} \text{ für alle } g \in G.$$

Zeigen Sie: Ist $H \subset G$ eine Untergruppe mit Index $[G : H] = 2$, dann ist H ein Normalteiler von G.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei $\varphi : G \longrightarrow F$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist $M \subset F$ ein Normalteiler, dann ist $\varphi^{-1}(M) \subset G$ ein Normalteiler.