Mathematik für Informatiker
Algebraische Strukturen
Übungsblatt 1

Abgabetermin Samstag, den 04.10.2022 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$n^3 + 2n$$

durch 3 teilbar ist.

2. Eine **logische Formel** verknüpft gegebene Aussagen zu einer neuen Aussage.

   (a) Für eine Aussage A ist die **Negation** $\neg A$ (**nicht** A) wahr wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. Für Aussagen A und B ist die **Konjunktion** $A \wedge B$ (A **und** B) wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, und falsch sonst.

   (b) Die **Disjunktion** $A \vee B$ (A **oder** B) ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, und falsch sonst.

   (c) Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Anderenfalls ist sie wahr.

   Eine logische Formel kann man eindeutig festlegen, indem man für alle möglichen Werte der gegebenen Aussagen die Werte der abgeleitenen Aussage mit einer sogenannten **Wahrheitswerttafel** angibt. Ordnen Sie die oben definierten logischen Operationen jeweils einer der folgenden Wahrheitswerttafeln zu:

A	B	??
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

A	B	??
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

A	B	??
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

A	??
1	0
0	1

3. Für zwei Aussagen A und B ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ wahr, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Anderenfalls ist die Äquivalenz falsch. Stellen Sie die Wahrheitswerttabelle von $A \Leftrightarrow B$ auf.

4. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttafeln, dass für Aussagen A, B und C die folgenden Aussagen immer wahr sind:

   (a) Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

   (b) De Morgansche Gesetze der Aussagenlogik:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

5. (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttafeln, dass für Aussagen A, B, C die folgenden Aussagen immer wahr sind:

   (a) Zur Negation:
   $$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \qquad A \vee \neg A$$

   (b) Zu $\wedge$:

   1. Assoziativität $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
   2. Idempotenz $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$,
   3. Kommutativität $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

   (c) Zu $\vee$:

   1. Assoziativität $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$,
   2. Idempotenz $(A \vee A) \Leftrightarrow A$
   3. Kommutativität $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

   (d) Zur Implikation:
   $$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
   $$((A \Rightarrow C) \ \wedge \ (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$