

Mathematik für Informatiker

Algebraische Strukturen

Übungsblatt 1

Abgabetermin Samstag, den 04.10.2022 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$n^3 + 2n$$

durch 3 teilbar ist.

2. Eine **logische Formel** verknüpft gegebene Aussagen zu einer neuen Aussage.
- (a) Für eine Aussage A ist die **Negation** $\neg A$ (**nicht** A) wahr wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist. Für Aussagen A und B ist die **Konjunktion** $A \wedge B$ (**A und B**) wahr, wenn beide Aussagen wahr sind, und falsch sonst.
 - (b) Die **Disjunktion** $A \vee B$ (**A oder B**) ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, und falsch sonst.
 - (c) Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Anderenfalls ist sie wahr.

Eine logische Formel kann man eindeutig festlegen, indem man für alle möglichen Werte der gegebenen Aussagen die Werte der abgeleiteten Aussage mit einer sogenannten **Wahrheitstafel** angibt. Ordnen Sie die oben definierten logischen Operationen jeweils einer der folgenden Wahrheitstafeln zu:

A	B	??	A	B	??	A	B	??	A	??
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0		
0	0	1	0	0	0	0	0	0		

3. Für zwei Aussagen A und B ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ wahr, wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ wahr sind. Anderenfalls ist die Äquivalenz falsch. Stellen Sie die Wahrheitstabelle von $A \Leftrightarrow B$ auf.
4. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass für Aussagen A, B und C die folgenden Aussagen immer wahr sind:
- (a) Distributivgesetze:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- (b) De Morgansche Gesetze der Aussagenlogik:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

5. (4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass für Aussagen A, B, C die folgenden Aussagen immer wahr sind:

(a) Zur Negation:

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \quad A \vee \neg A$$

(b) Zu $\wedge$:

1. Assoziativität $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$,
2. Idempotenz $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$,
3. Kommutativität $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

(c) Zu $\vee$:

1. Assoziativität $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$,
2. Idempotenz $(A \vee A) \Leftrightarrow A$
3. Kommutativität $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

(d) Zur Implikation:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$