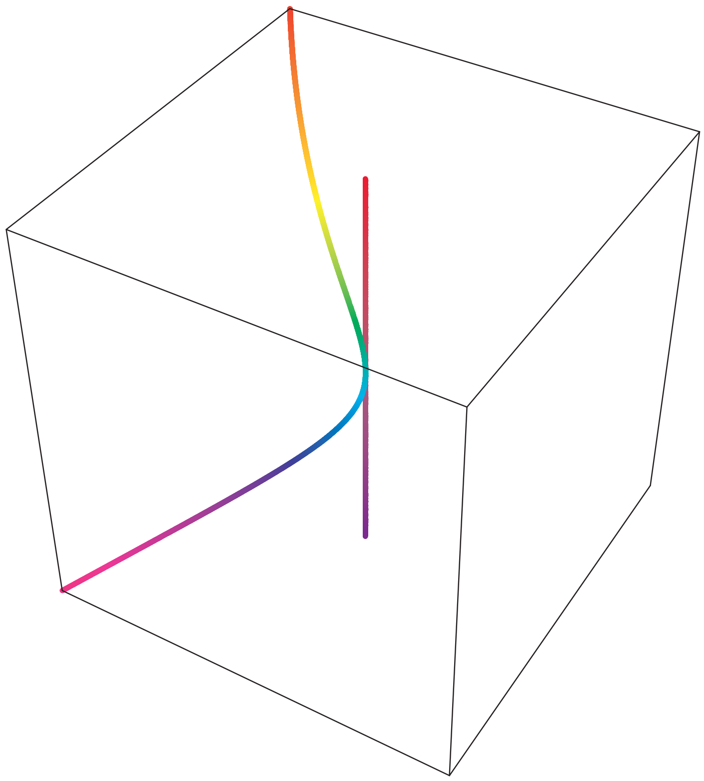
Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 9

Abgabetermin Dienstag, den 29.06.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. In $R = \mathbb{Q}[x, y, z, w]$ seien die Ideale
$$I_1 = \langle x, y \rangle$$
$$I_2 = \left\langle xw - yz,\ xz - y^2,\ yw - z^2 \right\rangle$$
gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$I_1 \cap I_2 = \left\langle xw - yz,\ xz - y^2 \right\rangle.$$
   Hinweis: Sie können das SINGULAR-Kommando `syz` verwenden.

   (b) Setzen Sie $w = 1$ und interpretieren Sie den Idealdurchschnitt aus (a) anhand der folgenden Abbildung:



2. Sei K ein Körper, $R = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ und $>$ die Grad-reverse-lexikographische Ordnung.

   (a) Verifizieren Sie mit dem Buchbergerkriterium, dass $G = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ eine Gröbnerbasis von
   $$I = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle \subset R,$$
   bezüglich $>$ ist.

   (b) Finden Sie mit Hilfe Ihrer Rechnung aus (a) eine Gröbnerbasis von $\mathrm{Syz}(G)$ bezüglich $>_G$.

3. Sei $R = K[x_0, ..., x_4]$ und $>$ die Ordnung lp und

$$G = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_0\}.$$

Bestimmen Sie eine minimale Gröbnerbasis G' von $\operatorname{Syz}(G)$ bezüglich $>_G$.

4. (a) Berechnen Sie eine minimale lexikographische Gröbnerbasis G von

$$\begin{aligned} I = \quad & \langle x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - x - y^3 + y, \\ & x^2 + 2xy + y^2 - 1, \\ & x^3 + x^2y + x^2 - xy^2 + 2xy - x - y^3 + y^2 + y - 1\rangle \subset \mathbb{C}[x, y]. \end{aligned}$$

   (b) Bestimmen Sie $V(I)$ aus G.

   (c) Skizzieren Sie $V(I)$ und auch $V(g)$ für alle $g \in G$.

5. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Ein R-Modul M heißt Noethersch, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

      1. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.
      2. Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.
      3. Jede nichtleere Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

      Zeigen Sie die Äquivalenz.

   (b) Folgern Sie: Für eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

      gilt: M ist Noethersch genau dann, wenn M' und M'' Noethersch sind.

   (c) Folgern Sie: Ist R ein Noetherscher Ring und $n \in \mathbb{N}$, dann ist R^n ein Noetherscher Modul.

6. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \subset K[x_1, ..., x_n]$ ein Ideal mit $|V(I)| < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$|V(I)| \leq \dim_K (K[x_1, ..., x_n]/I).$$