Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 8

Abgabe am Dienstag, den 22.06.2021, bis 23:59 in OpenOlat.

1. Sei
$$I = \left\langle y + x^2 + 1,\ xy + y^2 + y \right\rangle \subset R = \mathbb{Q}[x,y]$$
und betrachten Sie die lexikographische Ordnung lp.
   (a) Bestimmen Sie minimale Erzeuger von $L(I)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y^2}$ eine Vektorraumbasis von R/I bilden.
   (c) Bestimmen Sie die Multiplikationstabelle von R/I bezüglich dieser Basis.

2. Sei K ein Körper, $R = K[x_1, ..., x_n]$, $I \subset R$ ein Ideal, $>$ eine global Monomordnung und $\mathrm{NF}(-, I)$ eine reduzierte Normalform. Zeigen Sie, dass durch
$$\begin{array}{ccc} R/I & \to & {}_K\langle x^\alpha \mid x^\alpha \notin L(I)\rangle \\ \overline{f} & \mapsto & \mathrm{NF}(f, I) \end{array}$$
ein Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

3. Sei K ein Körper. Berechnen Sie in $K[x,y]$ jeweils den Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ der Ideale
   (a) $I_1 = \langle x, y\rangle$ und $I_2 = \langle x-1, y-1\rangle$.
   (b) $I_1 = \langle x, y^3\rangle$ und $I_2 = \langle x^2, y\rangle$.

4. Sei K ein Körper, $R = K[x,y]$ und
$$f = \begin{pmatrix} xy + y^2 \\ xy^2 - 1 \\ x^2y + x^2 + xy^2 + xy \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ xy + x \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} x+1 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$$
Teilen Sie f mit reduzierter Division durch g_1, g_2 bezüglich der Erweiterung der lexigraphischen Ordnung mit $x > y$ auf R^3 durch
   (a) Priorität für die Monome von R,
   (b) Priorität für die Komponenten.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein Körper und $>$ eine globale Monomordnung auf $R = K[x_1, ..., x_n]$. Ein Ideal $I \subset R$ heißt homogen, wenn es ein Erzeugendensystem aus homogenen Polynomen besitzt.
   (a) Seien $f, f_1, ..., f_s \in R$ homogen. Zeigen Sie, dass die Buchberger Normalform einen Standardausdruck
$$f = \sum\nolimits_{i=1}^{s} a_i \cdot f_i + r$$
mit allen a_i und r homogen berechnet. Was ist der Grad von r?
   (b) Zeigen Sie: Sind $f, g \in R$ homogen, dann ist auch $\mathrm{spoly}(f,g)$ homogen.
   (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Buchbergeralgorithmus, dass jedes homogene Ideal $I \subset R$ eine Gröbnerbasis aus homogenen Polynomen besitzt.
   (d) Zeigen Sie: Ein Ideal $I \subset R$ ist homogen genau dann, wenn seine reduzierte Gröbnerbasis aus homogenen Polynomen besteht.