Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 7

Abgabe am Mittwoch, den 16.06.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\deg(f) \leq 3$ mit

$$\begin{array}{rr} f(1) = 2 & f'(1) = 3 \\ f(-1) = 1 & f'(-1) = 2 \end{array}$$

   (a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von f auf.

   (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, indem Sie den Buchberger Algorithmus anwenden.

   (c) Erstellen Sie einen Plot des Graphen $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$.

   (d) Können Sie f auch mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes finden?

2. Zeigen Sie, dass die die Grad-reverse-lexikographische Ordnung *dp* eine globale Monomordnung ist.

3. (a) Sortieren Sie alle Monome vom Grad ≤ 3 in x, y, z bezüglich *dp*.

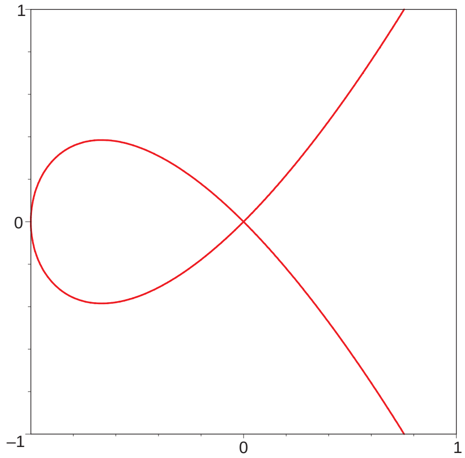
   (b) Teilen Sie

$$f = xy^2 + xyz - y^2z - yz^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$

   bezüglich *dp* mit Division mit Rest nach

$$G = \{x^2 + yz + z^2,\ xy + y^2 + yz\}.$$

4. Sei $C = \{(t^2 - 1, t^3 - t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Kurve



   (a) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis von

$$I = \langle x - (t^2 - 1),\ y - (t^3 - t)\rangle \subset \mathbb{R}[t, x, y]$$

   bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $t > x > y$.

   (b) Folgern Sie, dass $C \subset V(x^3 + x^2 - y^2)$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(t, x, y) \mapsto (x, y)$.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei

$$I = \langle st - x,\ t - y,\ s^2 - z \rangle \subset \mathbb{Q}[t, s, z, y, x].$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Buchbergeralgorithmus eine Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung mit

$$t > s > z > y > x.$$

(b) Berechnen Sie

$$J = I \cap \mathbb{Q}[z, y, x].$$

(c) Visualisieren Sie $V(J) \subset \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von SURFER.