Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 6

Abgabetermin Dienstag, den 08.06.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. (a) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie: $I = R$ genau dann, wenn $I \cap R^\times \neq \varnothing$.

   (b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Das Ideal $\langle x, y \rangle \subset K[x,y]$ ist kein Hauptideal.

   (c) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

2. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Jedes Ideal $I \subset R$ ist endlich erzeugt.

   (b) Jede aufsteigende Kette

   $$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$$

   von Idealen von R wird stationär, d.h. es gibt ein m, sodass

   $$I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \ldots$$

   (c) Jede nicht-leere Menge von Idealen von R besitzt bezüglich Inklusion ein maximales Element.

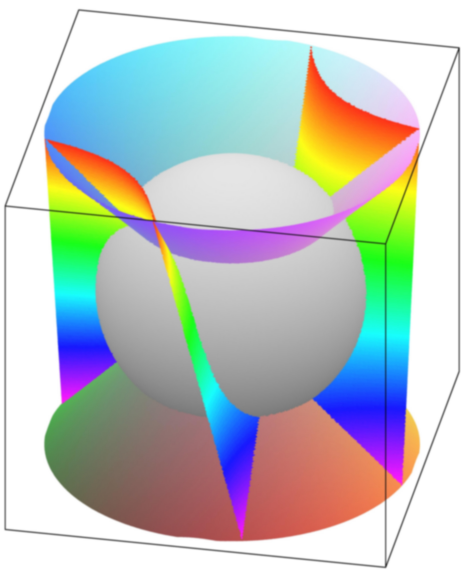
3. Bestimmen Sie die Verschwindungsmengen

   (a) $V(I) \subset \mathbb{C}$ für

   $$I = \left\langle x^5 + 2x^4 - x - 2, \quad x^4 + x^2 - 2 \right\rangle \subset \mathbb{C}[x]$$

   (b) $V(J) \subset \mathbb{R}^3$ für

   $$J = \left\langle x^2 + y^2 + z^2 - 9, \quad xy - z, \quad x^2 + y^2 - z^2 - 1 \right\rangle \subset \mathbb{R}[x,y,z]$$



4. Eine Monomordnung $>$ auf den Monomen

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Totalordnung die verträglich mit der Multiplikation ist, d.h.

$$x^\alpha > x^\beta \Rightarrow x^\alpha x^\gamma > x^\beta x^\gamma$$

für alle α, β, γ. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

   (a) $>$ ist eine Wohlordnung
   (d.h. jede nicht-leere Menge von Monomen hat ein kleinstes Element).

   (b) $x_i > 1\ \forall i$.

   (c) $x^\alpha > 1$ für alle $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

   (d) Falls $x^\beta \mid x^\alpha$ und $x^\alpha \neq x^\beta$ dann ist $x^\alpha > x^\beta$
   (d.h. $>$ verfeinert die Teilbarkeitsrelation).

5. (4 Zusatzpunkte) Sei

$$R = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$$

Zeigen Sie:

   (a) R ist ein Ring.

   (b) Jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal von R ist ein Hauptideal.

   (c) Das Ideal

$$I = \left\langle \frac{x}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle \subset R$$

   ist kein Hauptideal.

   (d) Jedes endlich erzeugte Ideal von R ist ein Hauptideal.

   (e) R ist nicht Noethersch.