Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 5

Abgabetermin Dienstag, den 01.06.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Seien $a_1 \geq a_2 > 0$ ganze Zahlen und
$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_j &= q_j \cdot a_{j+1} + a_{j+2} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} \cdot a_{n-1} + a_n \\ a_{n-1} &= q_{n-1} \cdot a_n + 0 \end{aligned}$$
die sukzessive Division mit Rest im Euklidischen Algorithmus, und sei
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
der goldene Schnitt.

   (a) Zeigen Sie, dass für $i = n, \ldots, 2$ gilt
$$a_i \geq \phi^{n-i}.$$

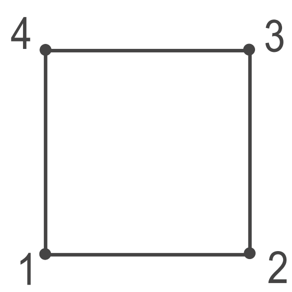
   (b) Folgern Sie, dass
$$n \leq \frac{\ln(a_2)}{\ln(\phi)} + 2.$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1: Für die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen der Bitlängen u und v mit dem Euklidischen Algorithmus genügen
$$O(u \cdot v)$$
B-Operationen.

3. Sei G eine Gruppe. Zwei Untergruppen $U_1, U_2 \subset G$ heißen konjugiert, wenn es ein $g \in G$ gibt mit
$$gU_1g^{-1} := \{gug^{-1} \mid u \in U_1\} = U_2.$$

   (a) Zeigen Sie, dass konjugiert sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G ist.

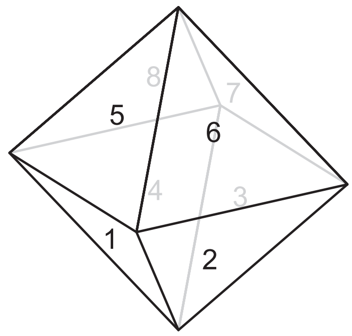
   (b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von Untergruppen der Symmetriegruppe des Quadrats. Welche Untergruppen sind Normalteiler?



Hinweis: Sie können die Klassen direkt bestimmen oder den GAP-Befehl `ConjugacyClassesSubgroups` verwenden.

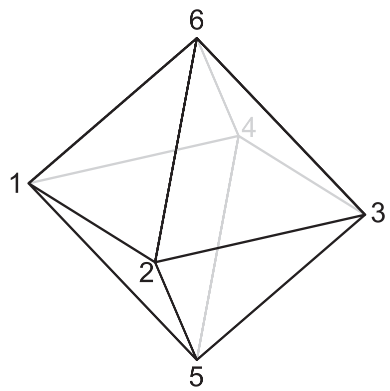
4. Sei $G = \mathrm{Sym}\,(O)$ die Symmetriegruppe des Oktaeders O.

   (a) Durch Nummerieren der Seiten von O



   ist ein Monomorphismus $f_1 : G \to S_8$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_1(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (b) Durch Nummerieren der Ecken von O



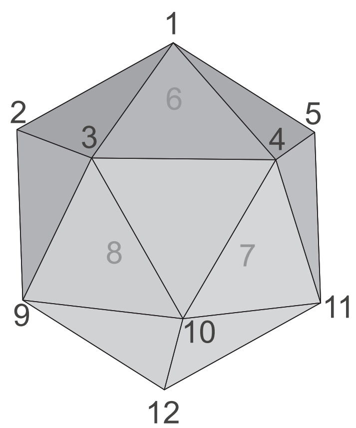
   ist ein Monomorphismus $f_2 : G \to S_6$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_2\,(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (c) Interpretieren Sie die in (a) und (b) gefundenen Erzeuger geometrisch.

   (d) Bestimmen Sie mit GAP einen Isomorphismus von $f_2(G) \to f_1(G)$.

   Hinweis: Verwenden Sie die GAP Befehle `Group`, `Size` und `IsomorphismGroups`.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei G die Symmetriegruppe des Ikosaeders



   (a) Berechnen Sie die Gruppenordnung von G.

   (b) Bestimmen Sie Erzeuger von G als Untergruppe von S_{12}. Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.