Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 4

Abgabe Dienstag, den 25.05.2021 bis 23:50 in OpenOlat.

1. Sei x in einem kommutativen Ring R mit 1 und $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Beschreiben Sie ein Verfahren, das mittels iterativem Quadrieren x^n berechnet.

   (b) Bestimmen Sie die Anzahl der R-Multiplikationen Ihres Verfahrens in Landau-Notation abhängig von n.

   (c) Wenden Sie das Verfahren an, um 3^{11} in $\mathbb{Z}$ und $\overline{3}^{11}$ in $\mathbb{Z}/7$ zu berechnen.

2. Sei $B \in \mathbb{Z}$, $B \geq 2$ und seien zwei Zahlen

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} a_i B^i \qquad y = \sum_{i=0}^{n-1} b_i B^i$$

   in B-adischer Entwicklung zur Basis B mit $a_{m-1}, b_{n-1} \neq 0$ und

$$1 < \frac{x}{y} < B$$

   gegeben. Sei weiter $x = q \cdot y + r$ mit $0 \leq r < y$ das Resultat der Division mit Rest von x durch y. Wir definieren $\widetilde{q}$ als das Minimum von $B - 1$ und

$$\left\lfloor \frac{a_n \cdot B + a_{n-1}}{b_{n-1}} \right\rfloor$$

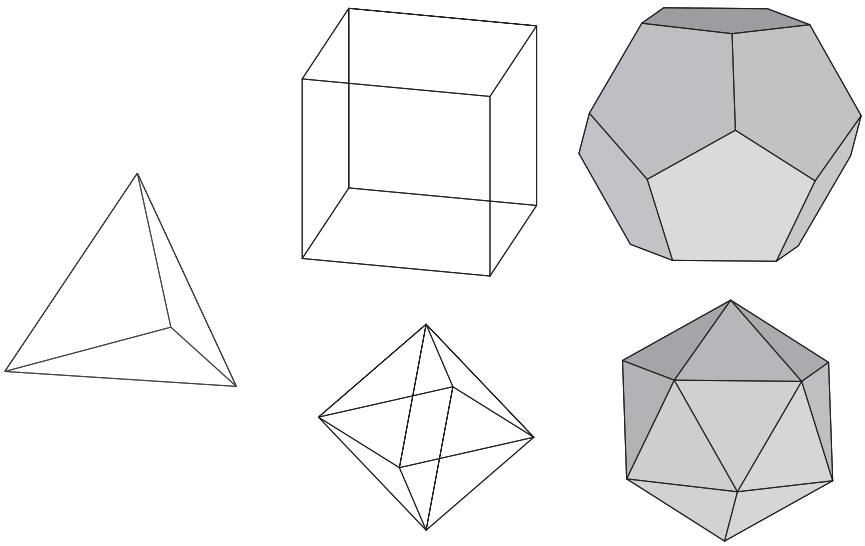
   (a) Bestimmen Sie q und $\widetilde{q}$ für $B = 10$ und

$$x = 3142351 \qquad y = 677688.$$

   (b) Zeigen Sie für x und y wie oben, dass

$$q \leq \widetilde{q}.$$

3. Basteln Sie Papiermodelle der Platonischen Körper Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Bitte in die Übung mitbringen.



4. Finden Sie für alle Platonischen Körper jeweils eine Drehsymmetrie und eine Spiegelsymmetrie und beschreiben Sie diese als Elemente der symmetrischen Gruppe S_n mit n die Anzahl der Ecken des Platonischen Körpers.

5. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Zeigen Sie mit der Notation und den Voraussetzungen aus Aufgabe 2: Ist

   $$b_{n-1} \geq \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$$

   dann gilt

   $$\widetilde{q} - 2 \leq q.$$

   (b) Folgern Sie unter den obigen Voraussetzung, dass bei der Division mit Rest die Zahl q in höchstens $3 \in O(1)$ Versuchen gefunden werden kann.