Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 3

Abgabetermin Mittwoch, den 19.05.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

   (a) Die Gleichung
   $$ax + by = d$$
   ist genau dann nach $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ lösbar, wenn
   $$\mathrm{ggT}(a, b) \mid d.$$

   (b) Ist (x, y) eine Lösung, dann auch
   $$\left(x + k \cdot \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)},\ y - k \cdot \frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}\right)$$
   mit $k \in \mathbb{Z}$, und alle Lösungen sind von dieser Form.

   (c) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von
   $$42 \cdot x + 55 \cdot y = 1.$$

2. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Für ein $a \in \mathbb{Z}$ gelte $a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$ und $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \bmod n$ für jeden Primteiler p von $n-1$. Zeigen Sie, dass n dann prim ist.

3. Eine Zahl n heißt Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis a, wenn n nicht prim ist, aber dennoch
   $$a^{n-1} \equiv 1 \bmod n$$
   gilt.

   (a) Bestimmen Sie jeweils alle Pseudoprimzahlen $n \leq 2000$ zur Basis a mit $a = 2, 3, 5$ und vergleichen Sie deren Anzahl mit der Anzahl der Primzahlen.

   (b) Eine Zahl n heißt Carmichael-Zahl, wenn sie zu jeder Basis a mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ eine Fermatsche Pseudoprimzahl ist. Haben Sie aus (a) eine Vermutung für eine Carmichael-Zahl?

   Hinweis: Sie können für die Berechnungen z.B. die Julia/Nemo-Funktionen `prime` und `rem` verwenden.

4. Ist $k \in \mathbb{N}$ mit $6k+1$, $12k+1$ und $18k+1$ prim, dann ist
   $$(6k+1) \cdot (12k+1) \cdot (18k+1)$$
   eine Carmichael-Zahl.

   Hinweis: Sie können Aufgabe 5 verwenden.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ zusammengesetzt. Zeigen Sie, dass n eine Carmichael-Zahl ist genau dann, wenn für alle Primteiler p von n gilt, dass
   $$p^2 \nmid n$$
   und
   $$(p-1) \mid (n-1).$$