

Einführung in das symbolische Rechnen

Übungsblatt 10

Abgabe Dienstag, den 06.07.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$$

die Smith-Normalform D und $S, T \in \text{GL}(4, \mathbb{Z})$ mit

$$S \cdot A \cdot T = D.$$

2. Sei G eine endliche abelsche Gruppe und

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$$

mit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine Präsentation. Zeigen Sie, dass für die Gruppenordnung von G gilt

$$|G| = |\det A|$$

3. Seien

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$$

Bestimmen Sie eine Basis (d.h. ein $\mathbb{Z}$ -linear unabhängiges Erzeugendensystem) der von $g_1, \dots, g_4$ erzeugten Untergruppe von $\mathbb{Z}^3$.

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$$

Bestimmen Sie

- (a) eine Basis des Bilds von A und
- (b) eine Basis des Kerns von A .

5. (4 Zusatzpunkte) Sei $R = \mathbb{C}[x]$. Bestimmen Sie jeweils die Smith-Normalform von

- (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$$

- (b)

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \in R^{3 \times 3}$$

Was sagt das Resultat über die Matrix $A(0)$?