Praktische Mathematik: Einführung in das symbolische Rechnen Übungsblatt 1

Abgabetermin Dienstag, den 04.05.2021 bis 23:59 in OpenOlat.

1. Sei $B \geq 2$ und $r \geq 1$. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Berechnung der B-adischen Entwicklung einer natürlichen Zahl $n \in \{0, ..., B^r - 1\}$ zur Basis B. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus mit einer B-adischen Entwicklung mit maximal r Stellen terminiert.

   Erproben Sie Ihr Verfahren für $n = 125$ und $n = 131$ jeweils mit $B = 2$ und $B = 10$.

2. Beschreiben Sie ein Verfahren, das

   (a) für eine ganze Zahl $n \in \{-2^r, ..., 0, ..., 2^r - 1\}$ die Zweierkomplementdarstellung in r Bits und einem Vorzeichenbit berechnet.

   (b) zwei Zahlen in Zweierkomplementdarstellung addiert. Können Sie einen arithmetischen Überlauf erkennen?

   (c) Erproben Sie Ihr Verfahren für $r = 4$ an den Additionen $-1 + 1$, $-11 + 14$, $8 + 7$ und $8 + 9$.

3. Sei P_N die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig gewählte natürliche Zahlen $n, m \leq N$ teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass für den Grenzwert gilt

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \frac{6}{\pi^2} \approx 60.7\%$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$$

   die man z.B. mit Hilfe von Fourierreihen beweisen kann.

4. (a) Zeigen Sie: Ist $r \in \mathbb{N}$ und $p = 2^r + 1$ prim, dann ist $r = 2^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Eine Fermat-Primzahl ist eine Primzahl der Form

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

   mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die nach dem Primzahlsatz erwartete Zahl von Fermat-Primzahlen endlich ist.

5. (4 Zusatzpunkte) Testen Sie den Primzahlsatz:

   (a) Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung von

$$\pi(x) = |\{p \leq x \mid p \in \mathbb{N} \text{ prim}\}|$$

   für $x > 0$.

   (b) Plotten Sie $\frac{\pi(x)}{x}$ und $\frac{1}{\ln(x)}$ und vergleichen Sie für großes x.