Einführung in das symbolische Rechnen
Praktikumsblatt 5

Abgabe bis Montag, den 25.06.2018 per Email an `yweber@rhrk.uni-kl.de`.

1. Sei K ein Körper und $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, $G = \{g_1, \ldots, g_r\} \subset R$ mit $0 \notin G$ und $>$ die lexikographische Ordnung.

   (a) Modifizieren Sie Ihre Implementierung der Division mit Rest in R so, dass sie eine reduzierte Normalform $\mathrm{NF}(-, G)$ bezüglich $>$ realisiert.

   (b) Sei G eine Gröbnerbasis von $I = \langle G \rangle$. Implementieren Sie die Ringstruktur des Quotientenrings R/I, d.h. Funktionen für Addition und Multiplikation, wobei Elemente vermöge des Isomorphismus

   $$\begin{array}{ccc} R/I & \to & {}_K\langle x^\alpha \mid x^\alpha \notin L(I) \rangle \\ \overline{f} & \mapsto & \mathrm{NF}(f, G) \end{array}$$

   dargestellt werden.

   (c) Bestimmen Sie in dieser Darstellung die Multiplikationstabelle von R/I für

   $$I = \left\langle x^2 + y^2 + z^2 - 9, \quad xy - z, \quad x^2 + y^2 - z^2 - 1 \right\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z].$$

2. (a) Sei K ein Körper und $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ und $>$ die grad-reverse-lexikographische Ordnung. Sei G eine Gröbnerbasis von $I = \langle G \rangle$ bezüglich $>$. Implementieren Sie eine Funktion, die ein Erzeugendensystem des Syzygienmoduls

   $$\mathrm{Syz}(G)$$

   bestimmt.

   (b) Sei $I \subset \mathbb{Q}[x, y, z, w]$ das Ideal erzeugt von den 2×2-Minoren der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ y & z & w & x \end{pmatrix}$$

   1. Verifizieren Sie, dass die Minoren eine Gröbnerbasis G von I bezüglich der grad-reverse-lexikographischen Ordnung bilden.
   2. Bestimmen Sie den Syzygienmodul $\mathrm{Syz}(G)$ dieser Gröbnerbasis.

3. (a) Implementieren Sie den Algorithmus zur Bestimmung der Smith-Normalform D einer ganzzahligen Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$:

   (b) Modifizieren Sie Ihre Funktion so, dass sie die Zeilen- bzw. Spaltentransformationen simultan auch auf der $n \times n$ bzw. $m \times m$ Einheitsmatrix durchführt, und dadurch $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ mit $S \cdot A \cdot T = D$ bestimmt.

   (c) Bestimmen Sie S, T und D für

   $$A = \begin{pmatrix} 10 & 41 & 6 & -19 \\ -6 & -19 & -4 & 9 \\ -6 & -41 & -2 & 19 \\ -12 & -62 & -8 & 30 \end{pmatrix}$$

   (d) Welche Ordnung hat die Gruppe

   $$G = \mathrm{coker}(A) = \mathbb{Z}^4 / \mathrm{Bild}(A).$$

   Klassifizieren Sie die Gruppe G.