Einführung in das symbolische Rechnen
Praktikumsblatt 4

Abgabe bis Montag, den 11.06.2018 per Email an `yweber@rhrk.uni-kl.de`.

1. Sei K ein in JULIA/NEMO verfügbarer Körper und $R = K[x_1, \dots, x_n]$.
   (a) Schreiben Sie Funktionen die für $f \in R$ das Leitmonom $L(f)$, den Leitterm $LT(f)$ und den Leitkoeffizienten $LC(f)$ bestimmen bezüglich
      1. der lexikographischen Ordnung lp, und
      2. der Grad-reverse-lexikographischen Ordnung dp.

   (b) Implementieren Sie mit Hilfe der Funktionen aus (a) einen Divisionsalgorithmus, der für $f \in R$ und $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subset R$ einen Standardausdruck
   $$f = \textstyle\sum_{i=1}^{s} a_i g_i + r$$
   bestimmt mit
   $$a_i g_i \neq 0 \Rightarrow L(f) \geq L(a_i g_i)$$
   für alle i und
   $$r \neq 0 \Rightarrow L(r) \notin L(G).$$
   Geben Sie sowohl die $a_1, \dots, a_s$ als auch r zurück.

   (c) Erproben Sie Ihre Implementierung an der Division von
   $$f = xy^2 + xyz - y^2 z - yz^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$
   nach
   $$G = \{x^2 + yz + z^2,\ xy + y^2 + yz\}$$
   bezüglich dp.

2. Sei K ein in JULIA/NEMO verfügbarer Körper, $R = K[x_1, \dots, x_n]$ und $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset R$ ein Ideal.
   (a) Implementieren Sie die Berechnung einer Gröbnerbasis $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ von I bezüglich lp und dp mit Hilfe des Buchbergeralgorithmus.
   (b) Minimieren Sie das Ergebnis in dem Sinne, dass kein $L(g_i)$ ein $L(g_j)$ mit $i \neq j$ teilt. Ist das Resultat weiterhin eine Gröbnerbasis von I?
   (c) Erproben Sie Ihre Implementierung an dem Ideal
   $$I = \left\langle st - x,\ t - y,\ s^2 - z \right\rangle \subset \mathbb{Q}[t, s, z, y, x].$$

3. Sei K ein in JULIA/NEMO verfügbarer Körper, $R = K[x_1, \dots, x_n]$ und $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset R$ ein Ideal und $1 \leq m \leq n - 1$.
   (a) Schreiben Sie eine Funktion, die Erzeuger von
   $$I \cap K[x_{m+1}, \dots, x_n].$$
   berechnet.
   (b) Verwenden Sie Ihre Implementierung, um
   $$\left\langle st - x,\ t - y,\ s^2 - z \right\rangle \cap \mathbb{Q}[z, y, x]$$
   zu bestimmen.