

Einführung in das symbolische Rechnen

Übungsblatt 9

Abgabe bis Montag, den 25.06.2018, 14:00 im Abgabekasten.

1. Sei $R = K[x_0, \dots, x_4]$ und $>$ die Ordnung lp und

$$G = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_0\}.$$

Berechnen Sie eine minimale Gröbnerbasis G' von $\text{Syz}(G)$ bezüglich $>_G$.

2. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{4 \times 4}$$

die Smith-Normalform D und $S, T \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$ mit

$$S \cdot A \cdot T = D.$$

3. Sei G eine endliche abelsche Gruppe und

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{A} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$$

mit $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine Präsentation. Zeigen Sie, dass für die Gruppenordnung von G gilt

$$|G| = |\det A|$$

4. (a) Ein R -Modul M heißt Noethersch, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

1. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.
2. Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.
3. Jede Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

Zeigen Sie die Äquivalenz.

- (b) Folgern Sie: Für eine exakte Sequenz von R -Moduln

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$$

gilt: M ist Noethersch genau dann, wenn M' und M'' Noethersch sind.

- (c) Folgern Sie: Ist R ein Noetherscher Ring und $n \in \mathbb{N}$, dann ist R^n ein Noetherscher Modul.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal mit $|V(I)| < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$|V(I)| \leq \dim_K (K[x_1, \dots, x_n]/I).$$