Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 8

Abgabe bis Montag, den 18.06.2018, 14:00 im Abgabekasten.

1. Sei
$$I = \left\langle y + x^2 + 1,\ xy + y^2 + y \right\rangle \subset R = \mathbb{Q}[x, y]$$
und betrachten Sie die lexikographische Ordnung lp.

   (a) Bestimmen Sie minimale Erzeuger von $L(I)$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y^2}$ eine Vektorraumbasis von R/I bilden.

   (c) Bestimmen Sie die Multiplikationstabelle von R/I bezüglich dieser Basis.

2. Sei K ein Körper, $R = K[x_1, ..., x_n]$, $I \subset R$ ein Ideal, $>$ eine global Monomordnung und $\mathrm{NF}(-, I)$ eine reduzierte Normalform. Zeigen Sie, dass durch
$$\begin{array}{ccc} R/I & \to & {}_K\langle x^\alpha \mid x^\alpha \notin L(I)\rangle \\ \overline{f} & \mapsto & \mathrm{NF}(f, I) \end{array}$$
ein Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben ist.

3. Sei K ein Körper, $R = K[x, y]$ und
$$f = \begin{pmatrix} xy + y^2 \\ xy^2 - 1 \\ x^2y + x^2 + xy^2 + xy \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ xy + x \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$$
Teilen Sie f durch g_1, g_2 bezüglich der Erweiterung der lexigraphischen Ordnung auf R^3 mit

   (a) Priorität für die Monome von R,

   (b) Priorität für die Komponenten.

4. Sei K ein Körper. Berechnen Sie in $K[x, y]$ jeweils den Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ der Ideale

   (a) $I_1 = \langle x, y\rangle$ und $I_2 = \langle x - 1, y - 1\rangle$.

   (b) $I_1 = \langle x, y^3\rangle$ und $I_2 = \langle x^2, y\rangle$.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein Körper, $R = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ und $>$ die Grad-reverse-lexikographische Ordnung.

   (a) Verifizieren Sie mit dem Buchbergerkriterium, dass $G = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ eine Gröbnerbasis von
   $$I = \langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle \subset R,$$
   bezüglich $>$ ist.

   (b) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Rechnung aus (a) eine Gröbnerbasis von $\mathrm{Syz}(G)$ bezüglich $>_G$.