

# Einführung in das symbolische Rechnen

## Übungsblatt 8

**Abgabe bis Montag, den 18.06.2018, 14:00 im Abgabekasten.**

1. Sei

$$I = \langle y + x^2 + 1, xy + y^2 + y \rangle \subset R = \mathbb{Q}[x, y]$$

und betrachten Sie die lexikographische Ordnung  $lp$ .

- (a) Bestimmen Sie minimale Erzeuger von  $L(I)$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}^2$  eine Vektorraumbasis von  $R/I$  bilden.
- (c) Bestimmen Sie die Multiplikationstabelle von  $R/I$  bezüglich dieser Basis.

2. Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[x_1, \dots, x_n]$ ,  $I \subset R$  ein Ideal,  $>$  eine global Monomordnung und  $\text{NF}(-, I)$  eine reduzierte Normalform. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{array}{ccc} R/I & \rightarrow & K \langle x^\alpha \mid x^\alpha \notin L(I) \rangle \\ \bar{f} & \mapsto & \text{NF}(f, I) \end{array}$$

ein Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen gegeben ist.

3. Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[x, y]$  und

$$f = \begin{pmatrix} xy + y^2 \\ xy^2 - 1 \\ x^2y + x^2 + xy^2 + xy \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ xy + x \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$$

Teilen Sie  $f$  durch  $g_1, g_2$  bezüglich der Erweiterung der lexigraphischen Ordnung auf  $R^3$  mit

- (a) Priorität für die Monome von  $R$ ,
- (b) Priorität für die Komponenten.

4. Sei  $K$  ein Körper. Berechnen Sie in  $K[x, y]$  jeweils den Durchschnitt  $I_1 \cap I_2$  der Ideale

- (a)  $I_1 = \langle x, y \rangle$  und  $I_2 = \langle x - 1, y - 1 \rangle$ .
- (b)  $I_1 = \langle x, y^3 \rangle$  und  $I_2 = \langle x^2, y \rangle$ .

5. (4 Zusatzpunkte) Sei  $K$  ein Körper,  $R = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$  und  $>$  die Grad-reverse-lexikographische Ordnung.

- (a) Verifizieren Sie mit dem Buchbergerkriterium, dass  $G = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  eine Gröbnerbasis von

$$I = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle \subset R,$$

bezüglich  $>$  ist.

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Rechnung aus (a) eine Gröbnerbasis von  $\text{Syz}(G)$  bezüglich  $>_G$ .