Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 7

Abgabe bis Montag, den 11.06.2018 bis 14:00 im Abgabekasten.

1. Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $\deg(f) \leq 3$ mit

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 & f'(1) &= 3 \\ f(-1) &= 1 & f'(-1) &= 2 \end{aligned}$$

   (a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von f auf.

   (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, indem Sie den Buchberger Algorithmus anwenden.

   (c) Erstellen Sie einen Plot des Graphen $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$.

   (d) Können Sie f auch mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes finden?

2. (a) Sortieren Sie alle Monome vom Grad ≤ 3 in x, y, z bezüglich dp.

   (b) Teilen Sie

$$f = xy^2 + xyz - y^2z - yz^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$$

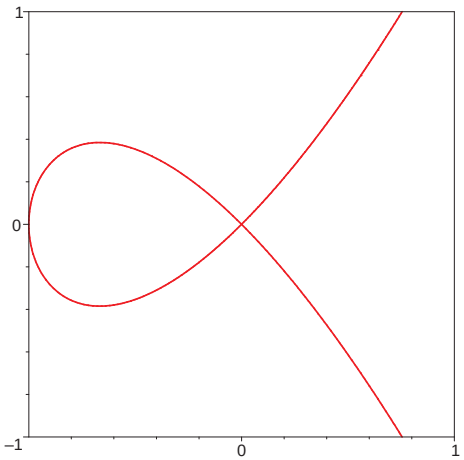
   bezüglich dp mit Division mit Rest nach

$$G = \{x^2 + yz + z^2,\ xy + y^2 + yz\}.$$

   (c) Berechnen Sie mit dem Buchbergeralgorithmus eine dp-Gröbnerbasis von

$$I = \langle G \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z].$$

3. Sei $C = \{(t^2 - 1, t^3 - t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Kurve



   (a) Berechnen Sie eine Gröbnerbasis von

$$I = \left\langle x - (t^2 - 1),\ y - (t^3 - t) \right\rangle \subset \mathbb{R}[t, x, y]$$

   bezüglich der lexikographischen Ordnung mit $t > x > y$.

   (b) Folgern Sie, dass $C \subset V(x^3 + x^2 - y^2)$.
   Hinweis: Betrachten Sie die Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(t, x, y) \mapsto (x, y)$.

4. Sei

$$I = \left\langle st - x,\ t - y,\ s^2 - z \right\rangle \subset \mathbb{Q}[t, s, z, y, x].$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Buchbergeralgorithmus eine Gröbnerbasis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung mit

$$t > s > z > y > x.$$

(b) Berechnen Sie

$$J = I \cap \mathbb{Q}[z, y, x].$$

(c) Visualisieren Sie $V(J) \subset \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Surfer.