Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 5a

Abgabetermin Donnerstag, den 24.05.2018 vor der Vorlesung.

1. Seien $a_1 \geq a_2 \geq 0$ ganze Zahlen und

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 \cdot a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ a_j &= q_j \cdot a_{j+1} + a_{j+2} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} \cdot a_{n-1} + a_n \\ a_{n-1} &= q_{n-1} \cdot a_n + 0 \end{aligned}$$

die sukzessive Division mit Rest im Euklidischen Algorithmus, und sei

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

der goldene Schnitt.

(a) Zeigen Sie, dass für $i = n, \dots, 2$ gilt

$$a_i \geq \phi^{n-i}.$$

(b) Folgern Sie, dass

$$n \leq \frac{\ln(a_2)}{\ln(\phi)} + 2.$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1: Für die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen der Bitlängen u und v mit dem Euklidischen Algorithmus genügen

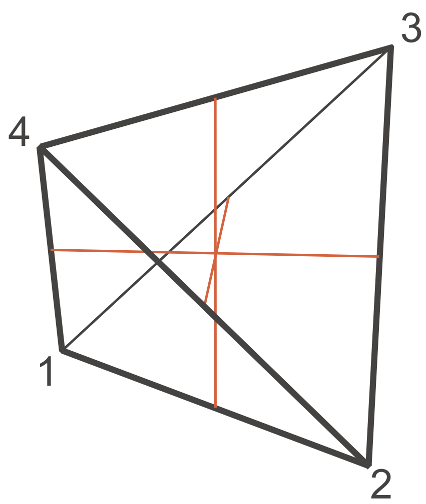
$$O(u \cdot v)$$

B-Operationen.

3. (4 Zusatzpunkte) Jede Symmetrie des Tetraeders $T \subset \mathbb{R}^3$ mit den Ecken

$$e_1 = (1,-1,-1) \quad e_2 = (-1,1,-1) \quad e_3 = (-1,-1,1) \quad e_4 = (1,1,1)$$

permutiert die Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^3$.



Dies induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : S_4 \to S_3.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von φ, dass die Kleinsche Vierergruppe

$$V_4 = \{() , (1,2)(3,4) , (1,3)(2,4) , (1,4)(2,3)\}$$

ein Normalteiler in S_4 ist und für die Quotientengruppe gilt

$$S_4 / V_4 \cong S_3.$$