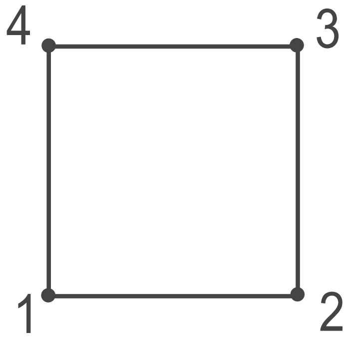
Einführung in das symbolische Rechnen
Übungsblatt 5

Abgabetermin Dienstag, den 22.05.2018 vor der Vorlesung.

1. Sei $G \times M \to M$ eine Operation der Gruppe G auf der Menge M. Zeigen Sie, dass für $a, b \in M$ durch
$$a \sim b :\Longleftrightarrow Ga = Gb$$
eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

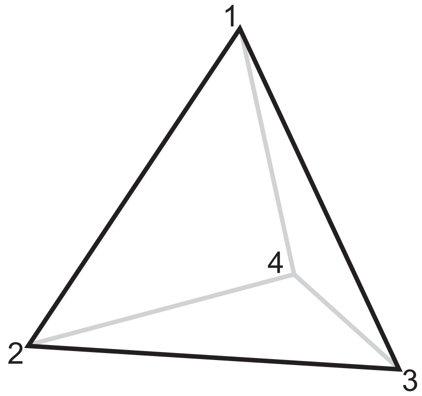
2. Sei G eine Gruppe. Zwei Untergruppen $U_1, U_2 \subset G$ heißen konjugiert, wenn es ein $g \in G$ gibt mit
$$gU_1g^{-1} := \{gug^{-1} \mid u \in U_1\} = U_2.$$
   (a) Zeigen Sie, dass konjugiert sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G ist.

   (b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von Untergruppen der Symmetriegruppe des Quadrats. Welche Untergruppen sind Normalteiler?



Hinweis: Sie können die Klassen direkt bestimmen oder den GAP-Befehl `ConjugacyClassesSubgroups` verwenden.

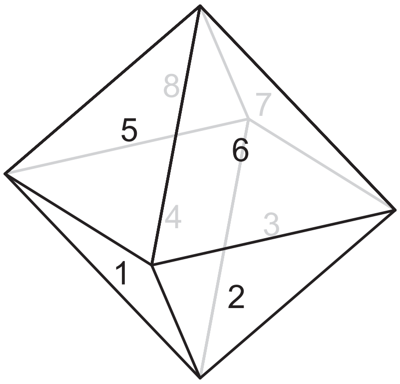
3. Sei G die Symmetriegruppe des Tetraeders



Zeigen Sie, dass
$$G \cong S_4.$$

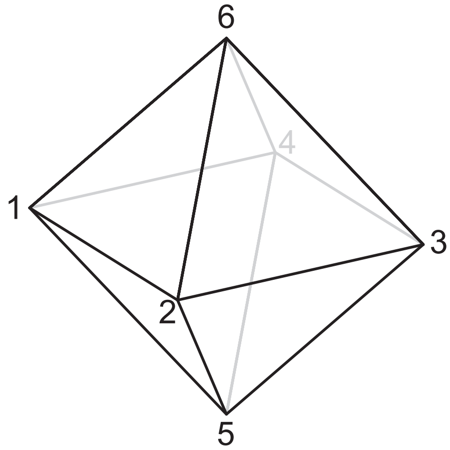
4. Sei $G = \mathrm{Sym}(O)$ die Symmetriegruppe des Oktaeders O.

   (a) Durch Nummerieren der Seiten von O



   ist ein Monomorphismus $f_1 : G \to S_8$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_1(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (b) Durch Nummerieren der Ecken von O



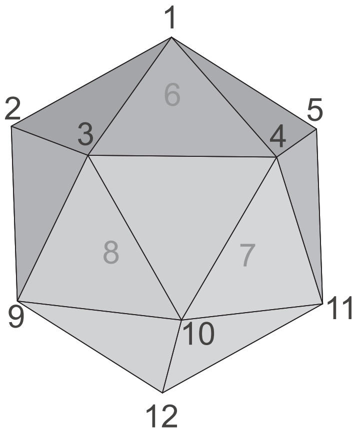
   ist ein Monomorphismus $f_2 : G \to S_6$ gegeben. Finden Sie Erzeuger von $f_2(G)$ und zeigen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.

   (c) Interpretieren Sie die in (a) und (b) gefundenen Erzeuger geometrisch.

   (d) Bestimmen Sie mit GAP einen Isomorphismus von $f_2(G) \to f_1(G)$.

   Hinweis: Verwenden Sie die GAP Befehle `Group`, `Size` und `IsomorphismGroups`.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei G die Symmetriegruppe des Ikosaeders



   (a) Berechnen Sie die Gruppenordnung von G.

   (b) Bestimmen Sie Erzeuger von G als Untergruppe von S_{12}. Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe von GAP.