

Einführung in das symbolische Rechnen

Übungsblatt 3

Abgabetermin Donnerstag, den 03.05.2018 vor der Vorlesung.

1. Seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Die Gleichung

$$ax + by = d$$

ist genau dann nach $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ lösbar, wenn

$$\text{ggT}(a, b) \mid d.$$

(b) Ist (x, y) eine Lösung, dann auch

$$\left(x + k \cdot \frac{b}{\text{ggT}(a, b)}, y - k \cdot \frac{a}{\text{ggT}(a, b)} \right)$$

mit $k \in \mathbb{Z}$, und alle Lösungen sind von dieser Form.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ von

$$42 \cdot x + 55 \cdot y = 1.$$

2. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Für ein $a \in \mathbb{Z}$ gelte $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ und $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ für jeden Primteiler p von $n-1$. Zeigen Sie, dass n dann prim ist.

3. Eine Zahl n heißt Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis a , wenn n nicht prim ist, aber dennoch

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

gilt.

(a) Bestimmen Sie jeweils alle Pseudoprimzahlen $n \leq 2000$ zur Basis a mit $a = 2, 3, 5$ und vergleichen Sie deren Anzahl mit der Anzahl der Primzahlen.

(b) Eine Zahl n heißt Carmichael-Zahl, wenn sie zu jeder Basis a mit $\text{ggT}(a, n) = 1$ eine Fermatsche Pseudoprimzahl ist. Haben Sie eine Vermutung für eine Carmichael-Zahl?

Hinweis: JULIA/NEMO-Funktionen `prime` und `rem`.

4. (4 Zusatzpunkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ zusammengesetzt. Zeigen Sie, dass n eine Carmichael-Zahl ist genau dann, wenn für alle Primteiler p von n gilt, dass

$$p^2 \nmid n$$

und

$$(p-1) \mid (n-1).$$

(b) Ist $k \in \mathbb{N}$ mit $6k+1$, $12k+1$ und $18k+1$ prim, dann ist

$$(6k+1) \cdot (12k+1) \cdot (18k+1)$$

eine Carmichael-Zahl.