Einführung in das symbolische Rechnen
Präsenzübung

1. Erproben Sie Julia/Nemo und Singular, insbesondere am Beispiel der Übungsaufgaben von Übungsblatt 1.

2. Sei $f = x^3 + 6x^2 + 14x + 9$ und $g = x^2 + 5x + 6$. Führen Sie sowohl in $\mathbb{Q}[x]$ als auch in $\mathbb{F}_3[x]$ die Division mit Rest von f nach g durch. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in Singular und Julia.

3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler
$$\mathrm{ggT}(x^6 - 1, \quad x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) \in \mathbb{Q}[x]$$
mit Hilfe von Julia/Nemo und Singular.

4. Zeigen Sie:
   (a) Ist $r \in \mathbb{N}$ und $p = 2^r - 1$ prim, dann ist r prim.
   (b) Ist $r \in \mathbb{N}$ und $p = 2^r + 1$ prim, dann ist $r = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

5. (a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt
$$\mathbb{Z}/(a \cdot b) \cong \mathbb{Z}/a \times \mathbb{Z}/b$$
   (b) Bestimmen Sie das Urbild von $(2 + 6\mathbb{Z}, -7 + 35\mathbb{Z})$ unter dem Gruppenisomorphismus
$$\mathbb{Z}/210 \cong \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/35$$
   Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Julia/Nemo und Singular.

6. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p = \{\overline{0}, ..., \overline{p-1}\}$ der Körper mit p Elementen.
   (a) Finden Sie, analog zum Sieb von Eratosthenes, alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[x]$ vom Grad ≤ 3.
   (b) Faktorisieren Sie $x^5 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ in ein Produkt von irreduziblen Polynomen.

7. (a) Bestimmen Sie die Einheiten und Nullteiler von $\mathbb{Z}/12$ und die Multiplikationstabelle der Einheitengruppe.
   (b) Zeigen Sie: In einem endlichen Ring ist jedes Element entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.