Mathematik für Informatiker
Kombinatorik und Analysis

Vorlesungsmanuskript Wintersemester 2013/14

Janko Böhm

8. November 2014

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

0

Einleitung

Wir wollen uns mit den Grundlagen der Kombinatorik und Analysis, insbesondere der Differentialrechnung, beschäftigen. Dies sind Teilgebiete der reinen Mathematik, neben Algebra, Zahlentheorie, Geometrie und Topologie. Wir wollen zunächst einen kurzen Überblick über diese Teilgebiete bekommen:

Was ist Kombinatorik? Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem Zählen, basiert also auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Mit Hilfe der Kombinatorik kann man zum Beispiel berechnen, dass es beim Ziehen der Lottozahlen $\binom{49}{6} \approx 14\,000\,000$ mögliche Ergebnisse gibt. Die Kombinatorik ist also eng mit der Wahrscheinlichkeitstheorie verknüpft. Sind alle Ereignisse beim Lotto gleich wahrscheinlich, dann ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Spiel zu gewinnen gleich

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{14\,000\,000}.$$

In der Informatik ist ein Teilgebiet der Kombinatorik besonders wichtig, die Graphentheorie. Graphen werden z.B. verwendet um Netzwerke zu beschreiben. Der Graph in Abbildung 1 beschreibt z.B. auf welche Weise vier Internet-Sites untereinander verlinkt sind. Solche Graphen werden beispielsweise in Googles Page-Rank-Algorithmus verwendet.

Was ist Zahlentheorie? Wie der Name schon verrät befassen sich die Zahlentheoretiker mit den Eigenschaften von Zahlen in

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

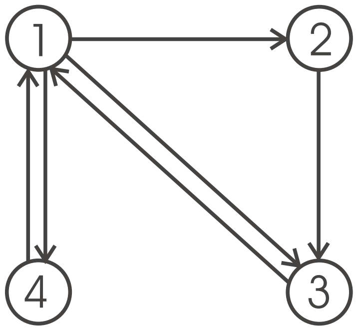


Abbildung 1: Gerichteter Graph von Links zwischen Internetseiten

insbesondere mit der Beziehung zwischen der Addition und der Multiplikation. Viele zahlentheoretische Probleme können sehr einfach formuliert, aber nur sehr schwer gelöst werden. Das bekannteste Beispiel ist sicherlich Fermats letzter Satz von 1637: Es gibt für $n \geq 3$ keine (nichttriviale) ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

Fermats letzter Satz wurde erst 1995 (von A. Wiles) bewiesen nach 350-jährigen Vorarbeiten, bei denen viele neue Konzepte in der Mathematik entwickelt wurden. Heute bestehen enge Beziehungen der Zahlentheorie zum Beispiel zur algebraischen Geometrie, Kombinatorik, Kryptographie und Codierungstheorie.

Was ist Algebra? Die Algebra ist ein weites Gebiet der Mathematik, das sich mit für alle Bereiche der Mathematik grundlegenden algebraischen Strukturen, wie Gruppen, Ringen und Körpern beschäftigt, d.h. mit der Frage, wie man auf Mengen Verknüpfungen einführen kann, wie z.B. die Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen. Die Public-Key Kryptographie verwendet z.B. Ergebnisse aus der Zahlentheorie und der Algebra. Ein weiterer wichtiger Berührungsbereich der Algebra besteht neben der Zahlentheorie mit der algebraischen Geometrie. Diese beschäftigt sich mit den Lösungsmengen von polynomialen Gleichungssystemen in mehreren Variablen über einem Körper K (zum Beispiel $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Körper der rationalen, reellen oder komplexen Zahlen). Zum Beispiel besteht die gemeinsame Lösungsmenge von $x^2 + 2y^2 = 3$ und $2x^2 + y^2 = 3$, d.h. der Durchschnitt von zwei Ellipsen, aus den 4 Punkten $(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)$, siehe Abbildung 2. Bei algebrai-

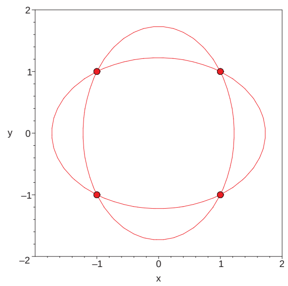


Abbildung 2: Vier Punkte

scher Geometrie über $K = \mathbb{Q}$ kommt die Zahlentheorie ins Spiel.

Der einfachste (aber in der Praxis sehr wichtige) Spezialfall sind lineare Gleichungssysteme über einem Körper K, das Kernthema der linearen Algebra. Hier lösen wir

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,m}x_m &= b_n \end{aligned}$$

mit $a_{ij} \in K$, $b_i \in K$ nach $x_j \in K$ (mit $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots m$). Lineare Algebra erlaubt uns z.B. aus den Link-Graphen wie in Abbildung 1 ein Page-Ranking für Suchmaschinen zu erstellen.

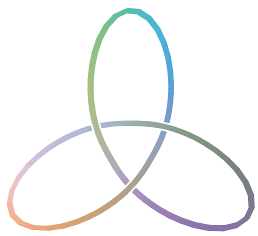


Abbildung 3: Knoten

Was ist Topologie? In der Topologie untersucht man Eigenschaften von Objekten, die sich unter stetigen Verformungen nicht ändern. Man sieht etwa, dass sich der Knoten in Abbildung 3 nicht ohne Aufschneiden entwirren läßt. Im Kapitel über Analysis werden wir uns mit der Stetigkeit von Abbildungen beschäftigen (d.h. mit stetigen Verformungen einer Geraden in den Graphen einer Funktion). Die Funktion mit dem Graphen in Abbildung 4 ist z.B. stetig, die in Abbildung 5 nicht. Der Begriff

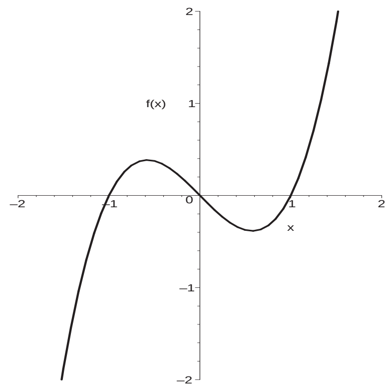


Abbildung 4: Eine stetige Funktion

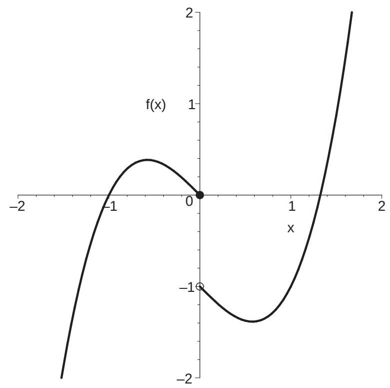


Abbildung 5: Eine unstetige Funktion

der Stetigkeit spielt eine wichtige Rolle in der Analysis und algebraischen Geometrie.

Was ist Analysis? Die moderne Analysis geht auf die Infinitesimalrechnung zurück, die von Leibniz und Newton entwickelt wurde. Im Wesentlichen geht es darum, einen Begriff der Steigung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ zu entwickeln, indem man die Tangente (Abbildung 6) an einem gegebenen Punkt durch Sekanten (Abbildung 7) approximiert[1].

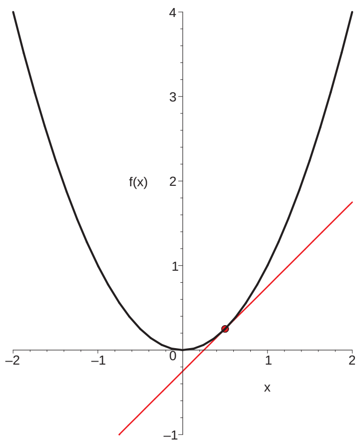


Abbildung 6: Die Tangente an $f(x) = x^2$ in $x = \frac{1}{2}$

Gegeben eine Funktion $x \mapsto f(x)$ stellt sich natürlich die Frage, ob $x \mapsto f'(x)$ wieder eine Funktion ist, wo sie definiert ist und welche Eigenschaften sie hat. Die Funktion in Abbildung 8 hat in $x = 0$ offenbar keine vernünftige Tangente. Solche Fragen beantwortet die Differentialrechnung. Umgekehrt kann f' gegeben sein und man will f bestimmen. Dies ist ein Problem der Integralrechnung.

Die ursprüngliche Motivation für die Entwicklung der Analysis war das Newtonsche Kraftgesetz. Die Bewegung einer Masse

[1]Konkret haben wir für $f(x) = x^2$ die Steigung

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0 = 1$$

der Tangente in $x_0 = \frac{1}{2}$ durch die Steigung

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 2$$

der Sekante in $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x_1 = \frac{3}{2}$ approximiert. Je weiter man x_1 dem korrekten Wert $x_0 = \frac{1}{2}$ annähert, desto genauer wird diese Approximation. Als Grenzwert für $x_1 \to \frac{1}{2}$ erhalten wir $f'(\frac{1}{2}) = 1$.

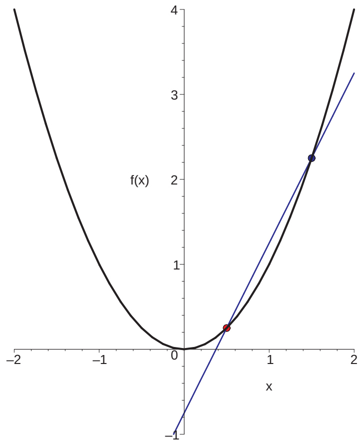


Abbildung 7: Eine Sekante an $f(x) = x^2$ in $x = \frac{1}{2}$

m an einer Feder (siehe Abbildung 9) wird beschrieben durch die Gleichung

$$m \cdot x''(t) = -c \cdot x(t)$$

zwischen der Position $x(t)$ und der zweiten Ableitung $x''(t)$. Die Rückstellkraft der Feder ist dabei direkt proportional zu der Auslenkung $x(t)$ der Feder (mit Proportionalitätskonstante $c > 0$) und führt zu der Beschleunigung $x''(t)$ der Masse $m > 0$. Man spricht von einem sogenannten harmonischen Oszillator. Eine Gleichung dieser Form bezeichnet man auch als Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$. Eine mögliche Lösung ist

$$x(t) = \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t),$$

siehe Abbildung 10, denn

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sqrt{\frac{c}{m}} \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t) \\ x''(t) &= -\frac{c}{m} \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t). \end{aligned}$$

Mit den Methoden der Analysis kann man die Menge aller möglichen Lösungen der Differentialgleichung beschreiben.

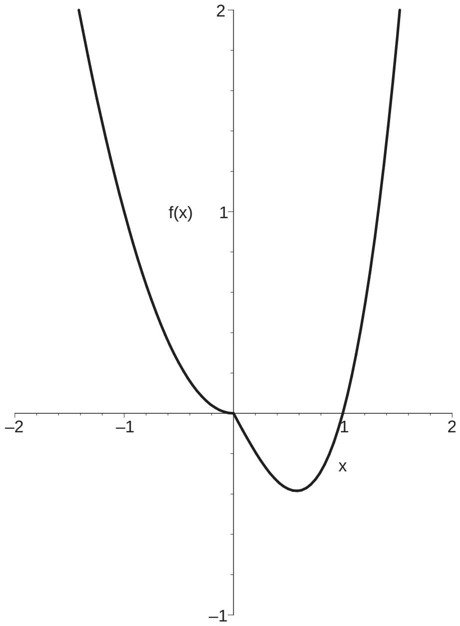


Abbildung 8: Eine Funktion die in $x = 0$ keine Tangente besitzt

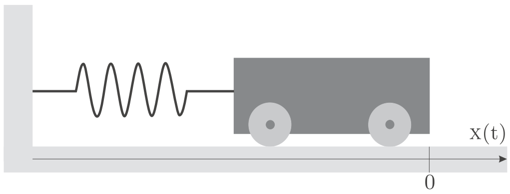


Abbildung 9: Harmonischer Oszillator

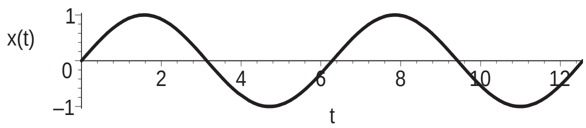


Abbildung 10: Eine Lösung für den harmonischen Oszillator

1

Elementare Logik

Die Basis jeder mathematischen Erkenntnis ist die Herleitung logischer Schlußfolgerungen, d.h. das Aufstellen und der Beweis von mathematischen Behauptungen. Auch in der Informatik spielen Beweise eine zentrale Rolle. Hat man z.B. einen neuen Algorithmus entwickelt, so muss man zwei Dinge zeigen: Der Algorithmus ist korrekt, und er terminiert nach endlich vielen Schritten. Andere Anwendungen der Logik in der Informatik sind das automatische Beweisen und die Verifikation der Korrektheit von Software und Hardware. Letzteres ist besonders wichtig bei kritischen technischen Systemen, wie z.B. Flugzeugen.

Wir führen zunächst kurz das Konzept von Aussagen ein und diskutieren dann die grundlegenden Beweisverfahren.

1.1 Aussagen und Folgerungen

In Programmiersprachen (wir verwenden im Folgenden die Syntax von Maple [8]) spielen bedingte Anweisungen eine entscheidende Rolle, z.B.

```
if x>1 then
    ...
fi;
```

führt die Anweisungen ... aus, falls die Variable x einen Wert größer als 1 annimmt. Der Ausdruck $x > 1$ kann genau zwei Werte annehmen: wahr oder falsch. Man schreibt:

Definition 1.1.1 *Eine **Aussage** ist ein Objekt (mathematischer*

Ausdruck, sprachliches Gebilde), dem genau der Wahrheitswert wahr (kurz w oder 1*) oder falsch (kurz f oder* 0*) zugeordnet werden kann.*

Hängt eine Aussage von einem Parameter x ab, dann spricht man auch von einer Aussageform. In Programmiersprachen bezeichnet man Aussagen bzw. Aussageformen auch als **boolschen Ausdruck** (**boolean expression**). Der Wert eines solchen Ausdrucks (0 oder 1) wird in dem Datentyp **Boolean** gespeichert.

Hat man mehrere bedingte Anweisungen gegeben, will man oft herausfinden, ob die eine aus der anderen folgt, z.B. können wir in

```
if x>1 then
    if x^2>1 then
        ...
    fi;
fi;
```

die zweite if-Abfrage weglassen, da aus $x > 1$ schon $x^2 > 1$ folgt. Wir schreiben

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1.$$

Dies ist eine **logische Schlussfolgerung**.

Allgemein nimmt man an, dass bestimmte Aussagen wahr sind und untersucht, welche anderen Aussagen sich daraus folgern lassen. Eine resultierende Aussage

ist Aussage A wahr, dann ist Aussage B wahr

oder kurz geschrieben,

$$A \text{ wahr} \Rightarrow B \text{ wahr}$$

bezeichnet man üblicherweise als **Satz**, die Herleitung als einen **Beweis**. Alternativ spricht man bei einem Zwischenergebnis auch von einem **Lemma**, bei nicht so zentralen Ergebnissen von einer **Proposition**. Bei einer Folgerung aus einem Satz spricht man von einem **Corollar**.

Die logische Schlussfolgerung ist ein Spezialfall einer logischen Operation:

Definition 1.1.2 *Eine* ***logische Operation*** *verknüpft gegebene Aussagen zu einer neuen Aussage. Wir bezeichnen diese dann als* ***abgeleitete Aussage*** *oder auch* ***logische Formel****.*

Bemerkung 1.1.3 *Logische Operationen können durch ihre Wahrheitswerttafel definiert werden. Die* ***Wahrheitswerttafel*** *beschreibt die Werte einer Aussage in Termen der Werte einer beliebigen endlichen Anzahl gegebener Aussagen.*

Beispiel 1.1.4 ***Negation*** *(**nicht** A)*

A	0	1
$\neg A$	1	0

Konjunktion *(A **und** B)*

		B	
	$A \wedge B$	0	1
A	0	0	0
	1	0	1

Disjunktion *(A **oder** B)*

		B	
	$A \vee B$	0	1
A	0	0	1
	1	1	1

Letzteres bedeutet, dass mindestens eine der Aussagen wahr ist.

In einem Programm würden wir typischerweise schreiben

```
if not A then ... fi;
if A and B then ... fi;
if A or B then ... fi;
```

Tatsächlich können wir auch den Ausdruck $A \Rightarrow B$ wieder als Aussage auffassen, ihm also den Wert wahr oder falsch zuordnen, abhängig von den Werten von A und B:

Beispiel 1.1.5 *Die **Implikation** $A \Rightarrow B$ hat die Wahrheitswerttafel*

		B	
	$A \Rightarrow B$	0	1
A	0	1	1
	1	0	1

Beispiel 1.1.6 *A und B heißen **äquivalent**, in Zeichen*

$$A \Leftrightarrow B$$

wenn $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Die Wahrheitswerttafel ist

		B	
	$A \Leftrightarrow B$	0	1
A	0	1	0
	1	0	1

Bemerkung 1.1.7 *Die Aussage*

$$(A \Rightarrow B) \text{ wahr}$$

ist äquivalent zu

$$A \text{ wahr} \Rightarrow B \text{ wahr}$$

denn beide Aussagen bedeuten, dass in der Tafel von $A \Rightarrow B$ der Wert 0 nicht angenommen wird.

Ein **Gegenbeispiel** zu $A \Rightarrow B$ erhalten wir, wenn B falsch aber A wahr ist.

Bemerkung 1.1.8 *Aus falschen Aussagen können richtige folgern, z.B. folgt durch Quadrieren*

$$1 = -1 \Rightarrow 1 = 1^2 = (-1)^2 = 1.$$

In der Mathematik ist es dennoch sehr wichtig, auch aus möglicherweise falschen Aussagen Folgerungen ziehen zu können, um diese am Ende (wenn man geschickt vorgegangen ist) als falsch zu erkennen:

$$7 - 9 > 1 \Rightarrow -2 > 1 \Rightarrow -3 > 0$$

Hier stehen also 3 *falsche Aussagen*

$$7 - 9 > 1 \qquad -2 > 1 \qquad -3 > 0$$

und 2 *wahre Aussagen*

$$7 - 9 > 1 \Rightarrow -2 > 1 \qquad -2 > 1 \Rightarrow -3 > 0$$

die wir durch Verknüpfung von falschen Aussagen mittels $\Rightarrow$ *erhalten.*

Es gibt abgeleitete Aussagen, die unabhängig von den Werten der gegebenen Aussagen nie oder immer wahr sind:

Definition 1.1.9 *Eine Aussage, die nie wahr ist, heißt* ***unerfüllbar****, anderenfalls* ***erfüllbar****. Eine* ***Tautologie*** *ist eine Aussage, die immer wahr ist.*

Eine Tautologie hat also nur Einträge 1 in der Wahrheitswerttafel, eine erfüllbare Aussage mindestens eine 1 und eine unerfüllbare Aussage nur Einträge 0.

Beispiel 1.1.10 *Die Aussage*

$$3 > 7 - 5$$

ist eine Tautologie, ebenso

$$(x > 0) \Rightarrow (x^2 > 0).$$

Die Aussage $A \wedge \neg A$ *ist unerfüllbar:*

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Beispiel 1.1.11 *Die Aussage*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

ist unabhängig von den Werten von A *und* B *immer wahr, also eine Tautologie.*

Beweis. Wir zeigen dies mit Hilfe der Wahrheitswerttafeln:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1

■

Satz 1.1.12 *Folgende Aussagen sind Tautologien:*

1) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

2) $A \vee \neg A$

3) $\neg(A \wedge \neg A)$

4) Kommutativgesetze:

  (a) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
  (b) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

5) Distributivgesetze:

  (a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  (b) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6) Assoziativgesetze:

  (a) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
  (b) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

7) De Morgansche Gesetze:

  (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
  (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

8) Idempotenz:

  (a) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$

(b) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$

9) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Beweis. Wahrheitswerttafeln für die ersten drei Aussagen:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \vee \neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1

Die weiteren Tautologien zeigen wir in Übung 1.1. ■

1.2 Elementare Beweismethoden

Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man diese Implikation in eine Verkettung von einfacheren Implikationen

$$A \Rightarrow C \Rightarrow B$$

zerlegen, solange bis man das Problem auf bekannte Implikationen zurückgeführt hat. Wir verwenden also, dass

$$(A \Rightarrow C \;\wedge\; C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

eine Tautologie ist (Übung: Beweisen Sie dies mit der Wahrheitswerttafel).

Lemma 1.2.1 *Seien n und m natürliche Zahlen $(1, 2, 3, \dots)$. Ist n gerade $(2, 4, 6, \dots)$ und m ungerade $(1, 3, 5, \dots)$, dann ist $n+m$ ungerade.*

Beweis. n gerade und m ungerade $\Rightarrow$ es gilt $n = 2s$ und $m = 2t-1$ mit natürlichen Zahlen s, t $\Rightarrow$ es gilt

$$n + m = 2(s + t) - 1$$

$\Rightarrow$ $n + m$ ist ungerade. ■

Manchmal ist es einfacher die äquivalente negierte Aussage zu zeigen, wir verwenden also die Tautologie

$$(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A),$$

die wir in Beispiel 1.1.11 gezeigt haben. Dies bezeichnet man auch als Beweis durch **Kontraposition** (indirekter Beweis). Der Beweis von folgendem Lemma gibt ein Beispiel:

Lemma 1.2.2 *Sei n eine natürliche Zahl. Ist n^2 gerade, dann auch n.*

Beweis. Angenommen n ist ungerade, also $n = 2m - 1$ mit einer natürlichen Zahl m. Dann ist

$$n^2 = 4m^2 - 4m + 1$$

also ungerade. ∎

Bei dem **Widerspruchsbeweis** der Aussage A nehmen wir an, dass A nicht wahr ist und führen dies zu einem Widerspruch. Wir verwenden also, dass $A \wedge \neg A$ immer falsch ist.

Bemerkung 1.2.3 *Jeder Kontrapositionsbeweis kann auch als Widerspruchsbeweis formuliert werden: Sei A wahr. Haben wir $\neg B \Rightarrow \neg A$ gezeigt, führt die Annahme B falsch zu einem Widerspruch. Somit ist B wahr.*

Der Beweis des folgenden Satzes gibt ein typisches Beispiel eines Widerspruchsbeweises:

Satz 1.2.4 *$\sqrt{2}$ ist **irrational**, d.h. keine rationale Zahl.*

Beweis. Angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, äquivalent $\sqrt{2}$ ist ein gekürzter Bruch $\frac{a}{b}$ von natürlichen Zahlen a, b mit $b \neq 0$. Aus $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ folgt

$$2b^2 = a^2$$

d.h. a^2 ist gerade, mit Lemma 1.2.2 ist also auch a gerade. Somit können wir schreiben $a = 2s$ mit einer natürlichen Zahl s, also

$$2b^2 = 4s^2.$$

Damit ist

$$b^2 = 2s^2$$

gerade, also mit Lemma 1.2.2 auch b gerade. Somit können wir schreiben $b = 2t$ mit einer natürlichen Zahl t, also war

$$\frac{a}{b} = \frac{2s}{2t}$$

nicht gekürzt. Wir haben also gezeigt, ist $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ gekürzt, dann ist $\frac{a}{b}$ nicht gekürzt, ein Widerspruch. ∎

1.3 Vollständige Induktion

Angenommen wir haben für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine beliebige Aussage $A(n)$ gegeben, und man hat gezeigt:

1) **Induktionsanfang**: $A(1)$ ist wahr,

2) **Induktionsschritt**: $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow$ $A(n+1)$ ist wahr.

Dies liefert eine Kette

$$A(1) \text{ wahr } \Rightarrow A(2) \text{ wahr } \Rightarrow A(3) \text{ wahr } \Rightarrow \ldots,$$

es ist also $A(n)$ wahr für jede natürliche Zahl n. Anschaulich zeigen wir also eine Aufpunktaussage und einen Vektor von Aussagen, den wir unendlich oft auf den Aufpunkt addieren.

Im Induktionsschritt bezeichnen wir $A(n)$ wahr auch als die **Induktionsvoraussetzung**.

Als Beispiel für einen Beweis mittels vollständiger Induktion zeigen wir eine Aussage über Summen.

Notation 1.3.1 *Für Zahlen $a_n, ..., a_m$ mit $n \leq m$ schreiben wir*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m$$

für deren Summe.

Genauso verwenden wir

$$\prod_{k=n}^{m} a_k = a_n \cdot \ldots \cdot a_m$$

für das Produkt.

Bemerkung 1.3.2 *Gegeben eine Liste $a = (a_1, ..., a_n)$ berechnet z.B. das folgende Computerprogramm die Summe $s = \sum_{k=1}^{m} a_k$:*

```
s:=0;
for k from 1 to m do
     s:=s+a[k];
od;
```

Beispiel 1.3.3 *Es ist*

$$\sum_{k=2}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Können wir eine allgemeine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k$ finden?

Satz 1.3.4 *Für alle natürlichen Zahlen gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. *Induktionsanfang* $n = 1$: Es ist

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsschritt n nach $n + 1$: Es ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

also folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

dass

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

■

Für weitere Beispiele siehe auch die Übungen 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 und 1.6.

Bemerkung 1.3.5 *Das Analogon zum Induktionsbeweis in der Informatik ist der* ***rekursive Algorithmus****. Zum Beispiel könnte der Algorithmus überprüfen, ob die Aussage $A(n)$ wahr ist. Wird der rekursive Algorithmus mit dem Input $n > 1$ aufgerufen, dann führt er $A(n)$ auf die Aussage $A(n-1)$ zurück und ruft sich dann selbst wieder mit dem Argument $n-1$ auf. Für $n = 1$ testet der Algorithmus die Aussage $A(1)$ direkt.*

Eine rekursive Funktion f zum Testen von $x > n$ für eine beliebige Zahl x und eine ganze Zahl $n \geq 0$ könnte folgendermaßen aussehen (wenn wir annehmen, dass unsere Programmiersprache nur $x > 0$ testen kann):

```
f:=proc(x,n)
    if n=0 then return(x>0);fi;
    return(f(x-1,n-1));
end proc;
```

Die erste Zeile entspricht dem Induktionsanfang, die zweite dem Induktionsschritt. Effizienter wäre es natürlich, $x > n \Leftrightarrow x-n > 0$ zu verwenden.

Für ein weiteres Beispiel siehe auch die Übungsaufgaben 1.6 und 1.7.

1.4 Übungsaufgaben

Übung 1.1 *Zeigen Sie, dass folgende Aussagen immer wahr (d.h. Tautologien) sind:*

1) *Kommutativgesetze:*

   (a) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

   (b) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

2) *Distributivgesetze:*

   (a) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   (b) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

3) *Assoziativgesetze:*

(a) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

(b) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

4) De Morgansche Gesetze:

(a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

5) Idempotenz:

(a) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$

(b) $(A \vee A) \Leftrightarrow A$

6) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Übung 1.2 *Zeigen Sie mit vollständiger Induktion*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

für jede natürliche Zahl n.

Übung 1.3 *Stellen Sie eine Formel für*

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

auf und beweisen Sie diese.

Übung 1.4 *Zeigen Sie mit vollständiger Induktion*

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

für jede natürliche Zahl n.

Übung 1.5 *Sei* n *eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass* 3 *ein Teiler von* $n^3 - n$ *ist.*

Hinweis: Vollständige Induktion.

Übung 1.6 *Das Spiel ”Die Türme von Hanoi” besteht aus 3 Spielfeldern, auf denen n Scheiben paarweise verschiedener Größe gestapelt werden können (siehe Abbildung 1.1). Zu Beginn des Spiels sind alle Scheiben auf einem der Spielfelder der Größe nach zu einem Turm gestapelt. Ziel des Spiels ist, den Anfangsstapel auf ein anderes Feld zu versetzen. Dazu darf in jedem Spielzug die oberste Scheibe eines beliebigen Turms auf einen anderen Turm, der keine kleinere Scheibe enthält, gelegt werden.*

Geben Sie einen Algorithmus an, der dieses Spiel löst, stellen Sie eine Formel für die Anzahl der notwendigen Züge auf, und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

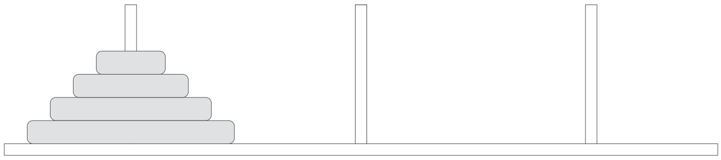


Abbildung 1.1: Die Türme von Hanoi.

Übung 1.7 *Schreiben Sie ein rekursives Programm, das das Spiel ”Die Türme von Hanoi” löst.*

2

Grundkonstruktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir Grundkonstruktionen mit denen wir aus gegebenen mathematischen Objekten neue konstruieren können. Der Mengenbegriff erlaubt uns ein neues mathematisches Objekt durch Zusammenfassen von gegebenen Objekten zu bilden. Zum Beispiel haben wir schon mehrfach von allen natürlichen Zahlen gesprochen. Diese fasst man in der Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

zusammen. Ausgehend vom Mengenbegriff beschäftigen wir uns dann mit der Frage, wie man zwei gegebene Mengen in Beziehung setzen kann, insbesondere mit Abbildungen zwischen Mengen und Äquivalenzrelationen auf Mengen.

2.1 Mengen

Definition 2.1.1 (Cantor) *Eine* ***Menge*** *ist eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (die* ***Elemente*** *von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Ist m ein Element von M schreiben wir $m \in M$, die Menge M mit den Elementen $m_1, m_2, \ldots$ als

$$M = \{m_1, m_2, \ldots\}.$$

Die Menge ohne Elemente heißt **leere Menge** $\varnothing = \{\ \}$.

Bemerkung 2.1.2 *Die Definition interpretieren wir folgendermaßen: Objekte sind mathematische Objekte und die Zusammenfassung zu einem Ganzen ein neues Objekt. Wohlunterschieden bedeutet, dass man entscheiden kann, ob zwei gegebene Elemente* $a, b \in M$ *gleich* ($a = b$) *oder verschieden* ($a \neq b$) *sind.*

Dasselbe Objekt kann also nicht mehrfach ein Element einer Menge sein. Fassen wir z.B. die Zahlen $1, 1, 2$ zu einer Menge zusammen, erhalten wir

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}.$$

Beispiel 2.1.3 *Mengen sind beispielsweise die Menge der Ziffern*

$$\{0, 1, 2, ..., 9\},$$

die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}.$$

Notation 2.1.4 *Oft wollen wir Objekte* x*, die eine gegebene Aussage* A *erfüllen, zu einer Menge* M *zusammenfassen. Dies kürzen wir mit*

$$M = \{x \mid A\}$$

ab. Falls alle x *Elemente einer Menge* N *sind, schreiben wir auch*

$$M = \{x \in N \mid A\}.$$

Zum Beispiel ist

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}.$$

Beispiel 2.1.5 *Die rationalen Zahlen sind*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}.$$

Verschiedene Brüche können dieselbe rationale Zahl (also dasselbe Element von $\mathbb{Q}$) darstellen, z.B.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

Was genau ein Bruch ist, werden wir mittels Äquivalenzrelationen im nächsten Kapitel präzisieren.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sollen die Punkte einer Geraden in unserem Anschauungsraum mathematisch repräsentieren. Jede reelle Zahl lässt sich durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen, z.B.

$$\frac{3}{10} = 0.300...$$
$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

Dieser muss nicht notwendig periodisch sein, z.B.

$$\sqrt{2} = 1.414213562...$$

Wir werden auch die reellen Zahlen mathematisch präzise mittels Äquivalenzrelationen einführen, denn verschiedene Dezimalbrüche können dieselbe reelle Zahl darstellen, z.B.

$$1.000... = 0.999...$$

Definition 2.1.6 *Ist jedes Element der Menge N auch Element der Menge M (also $n \in N \Rightarrow n \in M$), dann heißt N* ***Teilmenge*** *von M (geschrieben $N \subset M$ oder auch $N \subseteq M$). Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleich, wenn $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$. Wollen wir ausdrücken, dass die Teilmenge N von M echt kleiner ist, schreiben wir $N \subsetneqq M$.*

Beispiel 2.1.7

$$\{0, ..., 9\} \subset \mathbb{N}_0$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

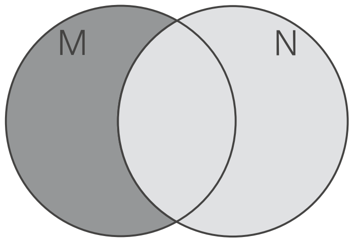


Abbildung 2.1: Komplement

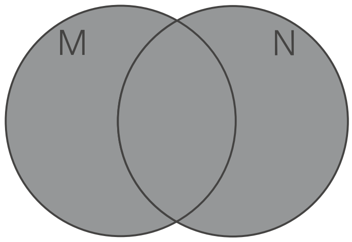


Abbildung 2.2: Vereinigung

Definition 2.1.8 *Sind M, N Mengen, dann ist*

$$M \backslash N = \{m \in M,\ m \notin N\}$$

*das **Komplement** von N in M, als sogenanntes Venn-Diagramm siehe Abbildung 2.1. Weiter heißt*

$$M \cup N = \{m \mid m \in M \text{ oder } m \in N\}$$

***Vereinigung** von M und N, siehe Abbildung 2.2, und*

$$M \cap N = \{m \mid m \in M \text{ und } m \in N\}$$

***Durchschnitt** von M und N, siehe Abbildung 2.3.*

Notation 2.1.9 *Für eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ und Mengen M_i, $i \in I$ schreibe*

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{m \mid m \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

für den Durchschnitt der M_i, $i \in I$, und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{m \mid \text{es existiert } i \in I \text{ mit } m \in M_i\}$$

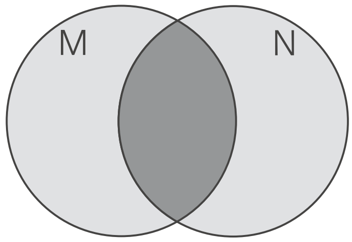


Abbildung 2.3: Durchschnitt

für die Vereinigung der M_i, $i \in I$.

*Wir kürzen **für alle** ab durch $\forall$ und **es existiert** durch $\exists$.*

Definition 2.1.10 *Wir schreiben $|M|$ oder $\#M$ für die **Anzahl der Elemente** einer endlichen Menge M und, falls M unendlich viele Elemente hat, $|M| = \infty$.*

Beispiel 2.1.11 *Es ist $|\varnothing| = 0$, $|\{0, ..., 9\}| = 10$ und $|\{0\}| = 1$.*

Definition 2.1.12 *Sind $M_1, ..., M_r$ Mengen, dann heißt die Menge der geordneten Tupel*

$$M_1 \times \ldots \times M_r = \{(m_1, \ldots, m_r) \mid m_i \in M_i \ \ \forall i = 1, ..., r\}$$

*aus Elementen von $M_1, ..., M_r$ das **kartesische Produkt** von $M_1, ..., M_r$. Für $r \in \mathbb{N}$ schreiben wir*

$$M^r = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{r\text{-mal}}$$

Beispiel 2.1.13 *Es ist*

$$\{1, 2, 3\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}\,.$$

Das Schachbrett ist das Produkt

$$\{1, ..., 8\} \times \{a, ..., h\}\,,$$

der 3-dimensionale Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

und die Menge der Wörter mit n Buchstaben in dem Alphabet $\{a, \ldots, z\}$ ist

$$\{a, \ldots, z\}^n.$$

Beispiel 2.1.14 *Von zentraler Bedeutung in der Informatik ist die Menge der* ***r-bit Zahlen***

$$\{0,1\}^r = \{(0,\ldots,0,0),(0,\ldots,0,1),\ldots,(1,\ldots,1,1)\},$$

in heutigen Computern typischerweise für $r = 8, 16, 32, 64$*. Da wir für jeden Eintrag des Tupels zwei Möglichkeiten haben, gilt*

$$|\{0,1\}^r| = 2^r.$$

Definition 2.1.15 *Sei* M *eine Menge. Die* ***Potenzmenge*** *von* M *ist*

$$2^M = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}.$$

Satz 2.1.16 *Sei* M *eine endliche Menge. Dann gilt*

$$\left|2^M\right| = 2^{|M|}.$$

Beweis. Indem wir die Elemente von M durchnummerieren können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $M = \{1,...,n\}$. Wir müssen also zeigen, dass die Aussage

$$\left|2^{\{1,\ldots,n\}}\right| = 2^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu verwenden wir vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$: Es ist $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$, also $|2^{\{1\}}| = 2 = 2^1$.
Induktionsschritt n nach $n+1$: Die Vereinigung

$$\begin{aligned} 2^{\{1,\ldots,n+1\}} &= \{A \subset \{1,...,n+1\} \mid n+1 \in A\} \,\dot\cup \\ &\quad\ \{A \subset \{1,...,n+1\} \mid n+1 \notin A\} \\ &= \{A' \cup \{n+1\} \mid A' \subset \{1,...,n\}\} \,\dot\cup\, \{A \mid A \subset \{1,...,n\}\} \end{aligned}$$

ist disjunkt, also gilt mit Induktionsvoraussetzung $2^{\{1,\ldots,n\}} = 2^n$, dass

$$\left|2^{\{1,\ldots,n+1\}}\right| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

■

Wollen wir ausdrücken, dass die Vereinigung der Menge M und N **disjunkt** ist (d.h. es gilt $M \cap N = \emptyset$), dann schreiben wir auch $M \,\dot\cup\, N$ statt $M \cup N$.

Beispiel 2.1.17 *Potenzmengen:*

$$\begin{aligned} 2^{\emptyset} &= \{\emptyset\} \\ 2^{\{1\}} &= \{\emptyset, \{1\}\} \\ 2^{\{1,2\}} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}. \end{aligned}$$

2.2 Relationen

Definition 2.2.1 *Eine* ***Relation*** *zwischen Mengen* M *und* N *ist gegeben durch eine Teilmenge* $R \subset M \times N$*.*

Beispiel 2.2.2 *Für* $M = \{2, 3, 7\}$, $N = \{4, 5, 6\}$ *und*

$$R = \{(m, n) \in M \times N \mid m \text{ teilt } n\}$$

gilt

$$R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\}.$$

Definition 2.2.3 *Eine Relation* $R \subset M \times M$ *auf einer Menge* M *heißt*

- ***reflexiv****, wenn* $(m, m) \in R$ *für alle* $m \in M$*,*
- ***transitiv****, wenn*

$$(l, m) \in R \text{ und } (m, n) \in R \Longrightarrow (l, n) \in R.$$

Ist R *zusätzlich* ***antisymmetrisch****, das heißt* $(n, m) \in R$ *und* $(m, n) \in R \Longrightarrow m = n$*, so heißt* R *eine* ***Halbordnung****. Gilt außerdem für alle* $m, n \in M$*, dass* $(m, n) \in R$ *oder* $(n, m) \in R$*, so heißt* R ***Totalordnung****.*

Beispiel 2.2.4 *Relationen sind:*

1) *Sei* M *eine Menge. Die Inklusion* $\subset$ *zwischen Teilmengen von* M *ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge* 2^M*: Für alle* $A, B, C \subset M$ *gilt*

   - $A \subset A$ *(reflexiv)*
   - $A \subset B$ *und* $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ *(transitiv)*
   - $A \subset B$ *und* $B \subset A \Longrightarrow A = B$ *(antisymmetrisch).*

2) *Auf* $\mathbb{R}$ *ist* $\leq$ *eine Totalordnung.*

2.3 Abbildungen

Definition 2.3.1 *Eine **Abbildung** $f : M \to N$ ist eine Relation $R \subset M \times N$, sodass es für jedes $m \in M$ genau ein $f(m) \in N$ gibt mit $(m, f(m)) \in R$. Schreibe*

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & N \\ & m & \mapsto & f(m) \end{array}$$

*Wir bezeichnen M als **Quelle** und N als **Ziel** von f.*

Für eine Teilmenge $A \subset M$ heißt

$$f(A) = \{f(m) \mid m \in A\} \subset N$$

***Bild** von A unter f, und*

$$\mathrm{Bild}(f) = f(M)$$

das Bild von f. Insbesondere heißt $f(M)$ das Bild von f.

Für $B \subset N$ heißt

$$f^{-1}(B) = \{m \in M \mid f(m) \in B\} \subset M$$

*das **Urbild** von B unter f.*

Beispiel 2.3.2 *Interpretiert man die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

als Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so ist

$$R = \left\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Graph}(f),$$

nichts anderes als der Graph von f, siehe Abbildung 2.4. Das Bild von f ist

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

und beispielsweise

$$f^{-1}(\{1,2\}) = \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

Beispiel 2.3.3 *Die Relation gegeben durch die Teilmenge $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wie in 2.5 ist keine Abbildung.*

Abbildung 2.5 ist also keine Abbildung...

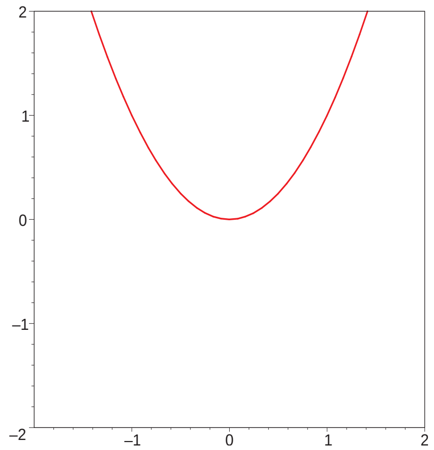


Abbildung 2.4: Graph der Parabel

Definition 2.3.4 *Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, wenn für das Bild von f gilt*

$$f(M) = N.$$

Gilt für alle $m_1, m_2 \in M$, dass

$$f(m_1) = f(m_2) \Longrightarrow m_1 = m_2,$$

*so heißt f **injektiv**.*

*Eine Abbildung die injektiv und surjektiv ist, heißt **bijektiv**. Ist $f : M \to N$ bijektiv, dann gibt es eine wohldefinierte **Umkehrabbildung** $f^{-1} : N \to M$, $y \mapsto x$ mit $y = f(x)$, denn jedes $y \in N$ ist das Bild eines eindeutigen $x \in M$.*

Beispiel 2.3.5 *Die Parabelfunktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

aus Beispiel 2.3.2 ist weder injektiv noch surjektiv. Als Abbildung auf ihr Bild

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$$

wird sie surjektiv. Schränken wir auch die Quelle ein, wird die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$$

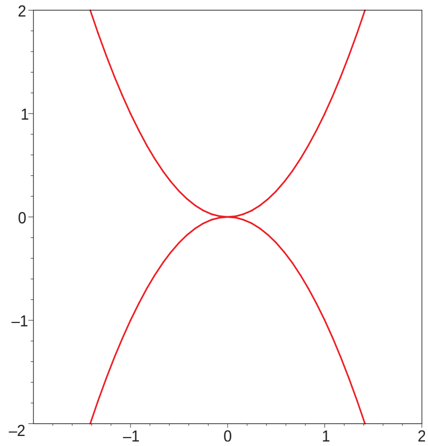


Abbildung 2.5: Relation aber keine Abbildung

bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ y \mapsto \sqrt{y}$$

wie in Abbildung 2.6.

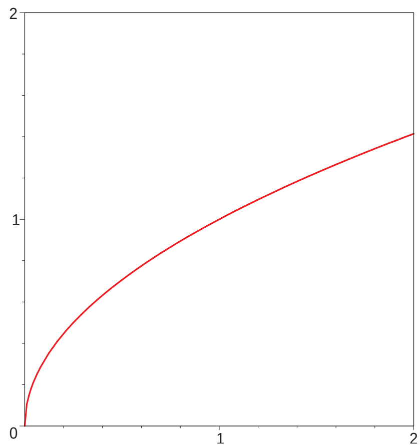


Abbildung 2.6: Wurzel

Die Hyperbel

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv (siehe Abbildung 2.7).

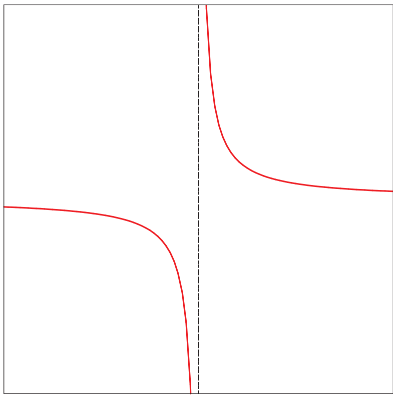


Abbildung 2.7: Hyperbel

Satz 2.3.6 (Schubfachprinzip) *Sind M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine injektive Abbildung, dann gilt $|M| \le |N|$.*

Beweis. Es gilt

$$|N| = \sum_{n\in N} |\{n\}| \ge \sum_{n\in N} \left|f^{-1}(\{n\})\right| = |M|,$$

denn $|f^{-1}(\{n\})| \in \{0, 1\}$, und

$$M = \bigcup_{n\in N} f^{-1}(\{n\})$$

(denn jedes Element von M hat ein Bild), und diese Vereinigung ist disjunkt (da ein Element von M keine zwei verschiedenen Bilder haben kann). ∎

Notation 2.3.7 *Für Zahlen a_n indiziert durch eine endliche Menge N schreiben wir*

$$\sum_{n\in N} a_n$$

für die Summe der a_n.

*Die a_n können Elemente einer beliebigen Menge R mit einer Verknüpfung $+$ sein, die **assoziativ** ist, d.h. mit $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$ für alle $r_i \in M$, und **kommutativ** ist, d.h. mit $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ für alle $r_i \in M$.*

***Indiziert** bedeutet, dass für jedes $n \in N$ eine Zahl a_n gegeben ist, d.h. eine Abbildung $N \to R$, $n \mapsto a_n$.*

Satz 2.3.8 *Sind M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung, dann gilt $|M| \geq |N|$.*

Beweis. Da f surjektiv ist, gilt

$$N = \bigcup_{m \in M} \{f(m)\}$$

(nicht notwendig disjunkt), also

$$|N| \leq \sum_{m \in M} |\{f(m)\}| = |M|,$$

denn $|\{f(m)\}| = 1 \ \forall m$. ■

Corollar 2.3.9 *Sind M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann gilt $|M| = |N|$.*

Siehe auch die Übungsaufgaben 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 und 2.9.

Definition 2.3.10 *Seien $f : M \to N$ und $g : N \to L$ Abbildungen, dann ist die* ***Komposition*** *von f und g definiert als*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & M & \to & L \\ & m & \mapsto & g(f(m)) \end{array}$$

Wir sagen auch ***g nach f***.

Beispiel 2.3.11 *Die Komposition $g \circ f$ von*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

gibt

$$g \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Lemma 2.3.12 *Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, das heißt für Abbildungen*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} K$$

gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Zum Beweis siehe Übungsaufgabe 2.10.

Beispiel 2.3.13 *Selbst wenn* $f : M \to M$ *und* $g : M \to M$ *ist im Allgemeinen* $f \circ g \neq g \circ f$. *Zum Beispiel für*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, y)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, x + y)$$

erhalten wir

$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$$
$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x + 2y).$$

Definition 2.3.14 *Sei* M *eine Menge. Die* ***identische Abbildung*** *auf* M *ist*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}_M : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & m \end{array}$$

Beispiel 2.3.15 *Abbildung 2.8 zeigt den Graphen von* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

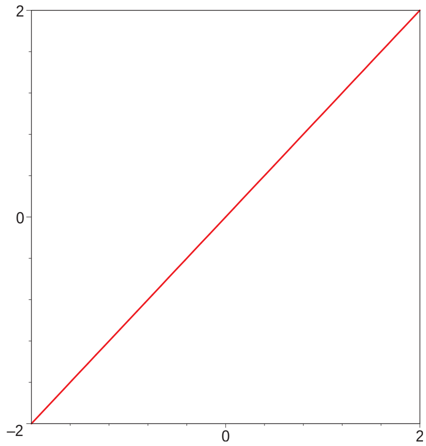


Abbildung 2.8: Identische Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Satz 2.3.16 *Sind* $M, N \neq \varnothing$ *und* $f : M \to N$ *eine Abbildung, dann ist*

1) f *injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung* $g : N \to M$ *gibt mit* $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

2) *f surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

3) *f bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.*

Weiter ist dann $g = f^{-1}$ die Umkehrabbildung.

Beweis. *Teil 1 und 2 zeigen wir in Übung 2.12.*

Zu 3: Sei f bijektiv. Ist $x \in M$ und $y = f(x)$, dann gilt für die Umkehrabbildung $f^{-1}(y) = x$, also

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M \,.$$

Durch Anwenden von f folgt, dass

$$(f \circ f^{-1})(f(x)) = f(x)$$

für alle $x \in M$. Da f surjektiv ist, erhalten wir jedes $y \in N$ als $y = f(x)$ und somit stimmen $f \circ f^{-1}$ und id_N auf ganz N überein, d.h. auch

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N \,.$$

Somit ist $g = f^{-1}$ eine Abbildung mit den gesuchten Eigenschaften.

Existiert umgekehrt eine solche Abbildung g, dann folgt f bijektiv mit Teil 1 und 2.

Es bleibt noch zu zeigen, dass g eindeutig durch $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ bestimmt und somit gleich f^{-1} ist: Sei $h : N \to M$ eine weitere Abbildung mit $h \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ h = \mathrm{id}_N$. Dann folgt

$$h = h \circ \mathrm{id}_N = h \circ f \circ g = \mathrm{id}_M \circ g = g.$$

■

2.4 B-adische Entwicklung

Wir diskutieren noch eine wichtige Anwendung von Abbildungen und kartesischen Produkten in der Informatik: Um natürliche Zahlen im Computer zu repräsentieren, verwendet man typischerweise die **Binärentwicklung**, d.h. die Darstellung der Zahl durch eine Summe von Potenzen der Basis $B = 2$. Allgemeiner hat man für beliebige Basis $B \geq 2$:

Satz 2.4.1 *Für jedes $B \in \mathbb{Z}$, $B \geq 2$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} \phi_{B,r}: & \{0,...,B-1\}^r & \to & \{0,...,B^r-1\} \\ & (a_{r-1},...,a_0) & \mapsto & \sum_{i=0}^{r-1} a_i B^i \end{array}$$

*bijektiv. Für $n \in \{0,...,B^r-1\}$ heißt $\phi_{B,r}^{-1}(n)$ die **B-adische Entwicklung mit r Stellen** von n.*

Beispiel 2.4.2 *Im Dezimalsystem ($B = 10$) gilt*

$$\phi_{10,3}((0,2,3)) = 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 = 23$$

und im Binärsystem ($B = 2$)

$$\phi_{2,8}((0,0,0,1,0,1,1,1) = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 23$$

Für gegebenes $(a_{r-1},...,a_0)$ ist es also leicht das Bild unter $\phi_{B,r}$ zu berechnen. Zum Beweis des Satzes verwenden wir einen Algorithmus, der das umgekehrte Problem löst, d.h. zu einer gegebenen Zahl n die B-adische Entwicklung $\phi_{B,r}^{-1}(n)$ bestimmt. Die Basis des Algorithmus ist:

Lemma 2.4.3 (Division mit Rest) *Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, dann gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = b \cdot q + r$$

und $0 \leq r < |b|$.

Beweis. Die Menge

$$\{w \in \mathbb{Z} \mid b \cdot w > a\} \neq \varnothing$$

hat ein kleinstes Element w. Setze dann

$$q = w - 1 \qquad r = a - qb \ .$$

■

Beispiel 2.4.4 *Division von $a = 36$ durch $b = 15$ gibt*

$$36 = 2 \cdot 15 + 6$$

also $q = 2$ und $r = 6$.
In Maple erhalten wir q und r durch:

```
iquo(36,15);
2
irem(36,15);
6
```

Wir zeigen nun Satz 2.4.1:

Beweis. Da

$$n = \sum_{i=0}^{r-1} a_i B^i \le \sum_{i=0}^{r-1} (B-1) \cdot B^i = \sum_{i=0}^{r-1} (B^{i+1} - B^i) = B^r - 1$$

liefert die Abbildungsvorschrift nur Zahlen $0 \le n \le B^r - 1$, und somit ist $\phi_{B,r}$ wohldefiniert. Die letzte Gleichheit bezeichnet man auch als eine **Teleskopsumme**, da sich in

$$(B^r - B^{r-1}) + (B^{r-1} - B^{r-2}) + \ldots + (B^2 - B) + (B-1) = B^r - 1$$

alle bis auf zwei Terme wegheben.

Wir zeigen, dass $\phi_{B,r}$ surjektiv ist, indem wir für jedes $n \in \{0, \ldots, B^r - 1\}$ eine B-adische Entwicklung mit maximal r Stellen konstruieren:

Sukzessive Division mit Rest nach B beginnend mit $n_0 = n$ gibt Zahlen $n_i \ge 0$ und Reste $a_i \in \{0, \ldots, B-1\}$ mit

$$n_i = B \cdot n_{i+1} + a_i.$$

Da in jedem Schritt $n_{i+1} < n_i$, terminiert die Division nach $s < \infty$ vielen Schritten mit $n_s = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n_0 &= B \cdot n_1 + a_0 \\ n_1 &= B \cdot n_2 + a_1 \\ &\vdots \\ n_{s-2} &= B \cdot n_{s-1} + a_{s-2} \\ n_{s-1} &= B \cdot 0 + a_{s-1}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Gleichungen ineinander ein, erhalten wir

$$n = \sum_{i=0}^{s-1} a_i B^i.$$

Jede Zahl n hat also eine B-adische Entwicklung. Für die Surjektivität von $\phi_{B,r}$ müssen noch zeigen, dass wir mit $s \le r$ Stellen auskommen: Angenommen $s > r$. Nach Definition von s haben wir $a_{s-1} = n_{s-1} \neq 0$. Somit ist $n \ge a_{s-1} B^{s-1} \ge B^{s-1} \ge B^r$, ein Widerspruch zu $n \le B^r - 1$.

Da sowohl Quelle und Ziel B^r Elemente haben, ist $\phi_{B,r}$ nach Übung 2.5 bijektiv. ∎

Bemerkung 2.4.5 *Natürlich können wir $\phi_{B,r}$ auch als Abbildung*

$$\{0,...,B-1\}^r \to \mathbb{N}$$

auffassen. Diese ist dann offensichtlich wohldefiniert, immer noch injektiv, jedoch nicht mehr surjektiv.

Der Beweis von Satz 2.4.1 gibt einen Algorithmus zur Bestimmung der B-adischen Entwicklung, d.h. zur Auswertung der Umkehrabbildung:

Beispiel 2.4.6 *Für $n = 23$, $B = 10$ ist*

$$\begin{aligned} 23 &= 10 \cdot 2 + 3 \\ 2 &= 0 \cdot 10 + 2 \end{aligned}$$

also ist $23 \in \mathrm{Bild}(\phi_{10,r})$ für alle $r \geq 2$, und damit z.B.

$$\phi_{10,3}^{-1}(n) = (0,2,3)$$

Für $B = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 11 + 1 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \\ 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

somit ist $23 \in \mathrm{Bild}(\phi_{2,r})$ für alle $r \geq 5$, und z.B. für $r = 8$ Bits

$$\phi_{2,8}^{-1}(n) = (0,0,0,1,0,1,1,1).$$

Ausführlich geschrieben haben wir

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 11 + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 5 + 1) + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1) + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 1 + 0) + 1) + 1) + 1 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 0 + 1) + 0) + 1) + 1) + 1 \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Siehe auch Übung 2.13. Man beachte noch: Für $r' > r$ erhalten wir bis auf führende Nullen dieselbe Entwicklung von n. Heutige Hardware verwendet üblicherweise je nach Anwendungsfall $B = 2$ und $r = 8, 16, 32, 64$. In Software kann man natürlich beliebiges B und r emulieren.

Addition und Multiplikation von B-adischen Darstellungen kann man in genau derselben Weise, wie in der Schule für $B = 10$ gelernt, durchführen. Erhalten wir durch Addition oder Multiplikation zweier Zahlen in $\mathrm{Bild}(\phi_{2,r})$ eine Zahl, die sich nicht mehr mit r Bits darstellen lässt (d.h. nicht im Bild von $\phi_{2,r}$ liegt), so spricht man von einem **arithmetischen Überlauf**. Siehe auch die Übungsaufgaben 2.14 und 2.15.

2.5 Äquivalenzrelationen

Der Begriff der Äquivalenzrelation schwächt den Begriff der Gleichheit ab.

Definition 2.5.1 *Sei M eine Menge und $R \subset M \times M$ eine reflexive und transitive Relation. Ist R außerdem **symmetrisch**, das heißt*

$$(m, n) \in R \Rightarrow (n, m) \in R,$$

*so heißt R eine **Äquivalenzrelation**.*

Schreiben wir $m \sim n$ für $(m, n) \in R$, dann bedeutet

- reflexiv, dass $m \sim m$ für alle $m \in M$,
- transitiv, dass $m \sim l$ und $l \sim n \Rightarrow m \sim n$ für alle $m, l, n \in M$ und
- symmetrisch, dass $m \sim n \Rightarrow n \sim m$ für alle $m, n \in M$.

Beispiel 2.5.2 *Die Eigenschaft von zwei Menschen gleich groß zu sein, ist eine Äquivalenzrelation (dagegen ist die Eigenschaft gleich groß bis auf einen Unterschied von maximal 1cm zu sein nicht transitiv).*

Allgemeiner: Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann wird durch

$$m_1 \sim m_2 \Longleftrightarrow f(m_1) = f(m_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert.

Definition 2.5.3 *Ist M eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $m \in M$, dann heißt*

$$[m] = \{n \in M \mid m \sim n\} \subset M$$

die ***Äquivalenzklasse*** *von m. Jedes $n \in [m]$ heißt* ***Repräsentant*** *von $[m]$.*

Wir schreiben weiter

$$M/\sim\, = \{[m] \mid m \in M\} \subset 2^M$$

für die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$ und

$$\begin{array}{rccc} \pi: & M & \to & M/\sim \\ & m & \mapsto & [m] \end{array}$$

für die ***kanonische Abbildung****. Diese ist offenbar surjektiv.*

Satz 2.5.4 *Je zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.*

Beweis. Sei $[m] \cap [n] \neq \emptyset$. Wir müssen $[m] = [n]$ zeigen. Ist $a \in [m] \cap [n]$, also $a \sim m$ und $a \sim n$, dann folgt mit Symmetrie und Transitivität, dass $m \sim n$, also $m \in [n]$. Sei nun $a \in [m]$ beliebig. Dann gilt $a \sim m$ und $m \sim n$, also $a \sim n$, das heißt $a \in [n]$. Wir haben also $[m] \subset [n]$ gezeigt. Die andere Inklusion folgt genauso. ■

Insbesondere gilt,

$$m \sim n \Leftrightarrow [m] = [n],$$

d.h. Äquivalenz von Elementen von M übersetzt sich in Gleichheit von Elementen von $M/\sim$.

Der Satz zeigt auch: Eine Äquivalenzrelation partitioniert die Menge M in die Äquivalenzklassen. **Partitionieren** bedeutet hier, eine Menge als disjunkte Vereinigung von nichtleeren Mengen zu schreiben.

Beispiel 2.5.5 *Zwei Atome einer Torte sollen äquivalent sein, wenn sie von derselben Person gegessen werden (dies ist eine Äquivalenzrelation, unter der naheliegenden Annahme, dass nichts von der Torte übrigbleibt). Die Einteilung in Äquivalenzklassen partitioniert die Torte in (nicht notwendig gleich grosse) Tortenstücke.*

Beispiel 2.5.6 *In Beispiel 2.5.2 sind zwei Menschen in derselben Äquivalenzklasse, genau dann, wenn sie gleich groß sind. Ist m ein Mensch, dann enthält $[m]$ alle Menschen, die dieselbe Größe wie m haben.*

Beispiel 2.5.7 *Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch*

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Longleftrightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Die Äquivalenzklassen sind die konzentrischen Kreise (und $\{(0,0)\}$), also

$$M/\sim = \left\{ \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = r \right\} \mid r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Siehe Abbildung 2.9. Siehe auch Übungsaufgabe 2.16.

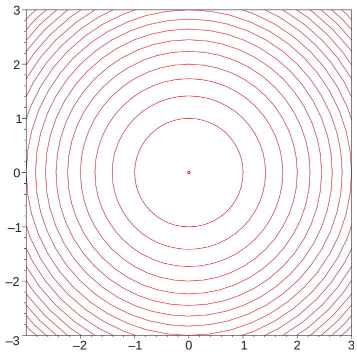


Abbildung 2.9: Äquivalenzklassen

2.6 Übungsaufgaben

Übung 2.1 *Bestimmen Sie die Wahrheitswerte folgender Aussagen:*

$$\begin{array}{ll}
\{3\} = |\{1,2,3\}| & \{1,3\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \\
0 \subseteq \{1,2,3\} & \{3\} \subseteq \{1,2,3\} \\
\{3\} \in \{1,2,3\} & |\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 8 \\
\{\varnothing\} \subseteq \{1,2,3\} & \varnothing \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \\
3 \in \{1,2,3\} & \{3\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \\
3 \subseteq \{1,2,3\} & \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\} \\
\varnothing \subseteq \{1,2,3\} & \{3\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \\
3 = |\{1,2,3\}| & \varnothing \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})
\end{array}$$

Übung 2.2 *Sei M eine Menge. Zeigen Sie für Teilmengen $A, B, C \subset M$, zum Beispiel mit Hilfe von Venn-Diagrammen:*

1) Für $\cap$ gilt:

- *(a) Kommutativität $A \cap B = B \cap A$,*
- *(b) Identität $A \cap M = A$,*
- *(c) Assoziativität $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.*

2) Für $\cup$ gilt:

- *(a) Kommutativität $A \cup B = B \cup A$,*
- *(b) Identität $A \cup \varnothing = A$,*
- *(c) Assoziativität $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.*

3) Für $\cap$ und $\cup$ gelten die Distributivgesetze

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4) Vergleichen Sie diese Formeln mit den Rechenregeln für ganze Zahlen.

5) *De Morgansche Gesetze der Mengenlehre:*

$$\overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$$
$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y}$$

Dabei schreiben wir $\overline{X} = M \backslash X$ *für das Komplement einer Teilmenge* $X \subseteq M$.

Übung 2.3 1) *Zeigen Sie für endliche Mengen* M *und* N, *dass*

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$$

und

$$|M \times N| = |M| \cdot |N|$$

2) *Gegeben drei Mengen* M, N *und* L, *stellen Sie eine Formel für* $|M \cup N \cup L|$ *auf, und beweisen Sie diese.*

Übung 2.4 *Geben Sie je ein Beispiel für eine Abbildung* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *an, die*

1) *injektiv aber nicht surjektiv ist.*

2) *surjektiv aber nicht injektiv ist.*

Übung 2.5 *Seien* M, N *endliche Mengen mit* $|M| = |N|$ *und* $f : M \to N$ *eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:*

1) f *ist bijektiv,*

2) f *ist injektiv,*

3) f *ist surjektiv.*

Übung 2.6 *Auf einem Fest treffen sich* n *Personen. Zeigen Sie, dass zwei von diesen mit derselben Anzahl von Anwesenden bekannt sind.*

Übung 2.7 *Seien die Zahlen* $1, ..., 101$ *in irgendeiner Reihenfolge gegeben. Zeigen Sie, dass* 11 *davon aufsteigend oder absteigend sortiert sind.*

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Menge von Paaren und verwenden Sie das Schubfachprinzip.

Übung 2.8 *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und seien* $n^2 + 1$ *viele Punkte in dem Quadrat*

$$\{(x, y) \mid 0 \le x < n,\ 0 \le y < n\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es unter diesen zwei Punkte gibt, die Abstand $\le \sqrt{2}$ *haben.*

Übung 2.9 *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $M \subset \{1, \ldots, 2n\}$ *eine Menge von ganzen Zahlen mit* $|M| = n + 1$ *Elementen. Zeigen Sie, dass es in* M *zwei verschiedene Zahlen gibt, sodass die eine Zahl die andere teilt.*

Übung 2.10 *Zeigen Sie: Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, das heißt für Abbildungen*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} K$$

gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Übung 2.11 *Es seien* M, N *zwei Mengen und* $f : M \to N$ *eine Abbildung. Zeigen Sie:*

1) *Für jede Teilmenge* $X \subseteq M$ *gilt* $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

2) *Für jede Teilmenge* $Y \subseteq N$ *gilt* $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Gilt jeweils auch die Gleichheit?

Übung 2.12 *Seien* $M, N, L \neq \varnothing$ *Mengen und* $f : M \to N$ *und* $h : N \to L$ *Abbildungen. Zeigen Sie:*

1) *Sind* f *und* h *injektiv, dann ist auch* $h \circ f$ *injektiv.*

2) *Sind* f *und* h *surjektiv, dann ist auch* $h \circ f$ *surjektiv.*

3) f *ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung* $g : N \to M$ *gibt mit* $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

4) f *ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung* $g : N \to M$ *gibt mit* $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Übung 2.13 *1) Bestimmen Sie für* $n = 1222$ *die Binärdarstellung* $\phi_{2,16}^{-1}(n)$ *in* 16 *Stellen.*

2) Schreiben Sie ein Programm, das für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ *die Binärdarstellung* $\phi_{2,r}^{-1}(n)$ *für geeignetes* $r \in \mathbb{N}$ *bestimmt.*

Übung 2.14 *Seien* $a, b \in \{0,1\}^r$ *Binärzahlen in* r *Bits.*

1) Beschreiben Sie ein Verfahren, das aus a *und* b *die Summe bestimmt, d.h. für minimal mögliches* s *ein* $c \in \{0,1\}^s$ *mit*

$$\phi_{2,s}(c) = \phi_{2,r}(a) + \phi_{2,r}(b).$$

2) Implementieren Sie Ihren Algorithmus und erproben Sie ihn an Beispielen.

Übung 2.15 *Beschreiben Sie ein Verfahren, das aus zwei Binärzahlen* $a, b \in \{0,1\}^r$ *das Produkt bestimmt, d.h. für minimal mögliches* $s \in \mathbb{N}_0$ *ein* $c \in \{0,1\}^s$ *mit*

$$\phi_{2,s}(c) = \phi_{2,r}(a) \cdot \phi_{2,r}(b).$$

Implementieren Sie Ihren Algorithmus.

Übung 2.16 *Betrachten Sie die Menge* $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *aller Punkte der reellen Ebene ohne den* 0*-Punkt.*

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $M \times M$ *durch* $(x,y) \sim (x',y')$ *genau dann, wenn es eine Gerade durch den Nullpunkt* $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ *gibt, auf der sowohl der Punkt* (x,y) *als auch der Punkt* (x',y') *liegt.*

1) Zeigen Sie, dass durch $\sim$ *eine Äquivalenzrelation gegeben ist.*

2) Finden Sie eine geometrische Darstellung der Menge der Äquivalenzklassen $M/\sim$*, indem Sie in jeder Äquivalenzklasse einen geeigneten Repräsentanten wählen.*

3

Ganze und rationale Zahlen

3.1 Übersicht

Die Addition von natürlichen Zahlen hat eine grundlegenden Schwachpunkt: Entfernen wir aus einer n-elementigen Menge ein Element, so hat diese Menge $n+(-1)$ Elemente. Als Addition von natürlichen Zahlen macht diese Formel keinen Sinn, denn es gibt keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$1 + n = 0.$$

Als Anwendung von Äquivalenzrelationen konstruieren wir in diesem Abschnitt aus den natürlichen Zahlen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, in denen eine Element -1 existiert mit

$$1 + (-1) = 0.$$

Für die Multiplikation besteht dann immernoch dasselbe Problem, denn es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$2 \cdot n = 1.$$

Wieder mit Äquivalenzrelationen, konstruieren wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, in denen es ein Element $\frac{1}{2}$ gibt mit

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Abschließend werden wir noch zeigen, dass sich sowohl die Menge der ganzen, als auch die Menge der rationalen Zahlen abzählen lässt. Dies bedeutet, dass wir eine while-Schleife schreiben können, die alle Elemente durchläuft und jedes Element in endlicher Zeit erreicht.

3.2 Gruppen, Ringe und Körper

Definition 3.2.1 *Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \mapsto & a \circ b \end{array}$$

die folgende Axiome erfüllt:

(G1) Assoziativität

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \ \forall a, b, c \in G$$

*(G2) Es existiert ein **neutrales Element**, d.h. ein $e \in G$ mit*

$$e \circ a = a \circ e = a \ \forall a \in G$$

*(G3) Existenz des **Inversen**, d.h. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G$ mit*

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$$

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung

$$\circ: \quad G \times G \longrightarrow G$$

*die $(G1)$ und $(G2)$ erfüllt heißt **Monoid**.*

*Gilt außerdem das **Kommutativgesetz***

$$a \circ b = b \circ a \ \forall a, b \in G$$

*dann heißt G **abelsch** oder **kommutativ**.*

Beispiel 3.2.2 *Mit der Addition + ist*

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ein kommutatives Monoid mit neutralem Element 0, jedoch keine Gruppe, da es z.B. kein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $n + 1 = 0$.

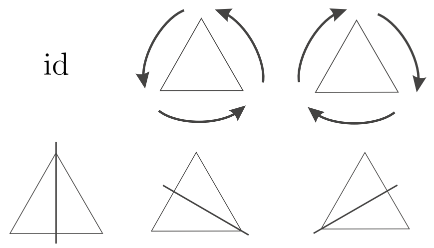
Mit der Multiplikation $\cdot$ ist

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

ein kommutatives Monoid mit neutralem Element 1, jedoch keine Gruppe, da es z.B. kein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \cdot 2 = 1$.

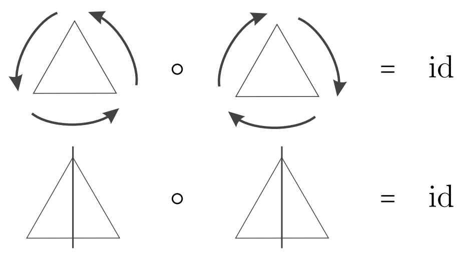
Auf die axiomatische Definition der natürlichen Zahlen wollen wir hier nicht weiter eingehen. Als Übungsaufgabe informiere man sich in Buch oder Suchmaschine der Wahl über die Peano-Axiome.

Beispiel 3.2.3 *Das gleichseitige Dreieck D hat* 6 ***Symmetrien*** *(d.h. abstandserhaltende Abbildungen die D wieder auf sich selbst abbilden): die Identität, zwei Drehungen (um* $120°$ *und* $240°$*) und* 3 *Spiegelungen (an einer Geraden durch eine Ecke und eine Seitenmitte). Diese Elemente wollen wir schematisch schreiben als:*



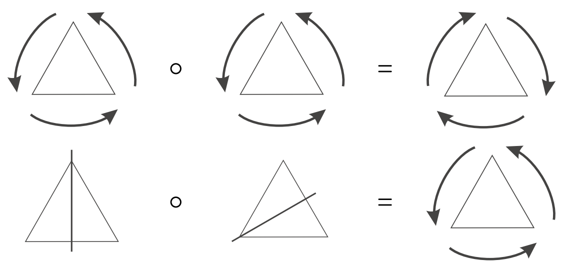
Satz 3.2.4 *Die Menge der Symmetrien* $\mathrm{Sym}(D)$ *von D ist mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe.*

Beweis. Komposition von Abbildungen ist nach Lemma 2.3.12 assoziativ. Das Neutrale ist id. Jedes Element hat ein Inverses



(und genauso für die anderen beiden Spiegelungen).

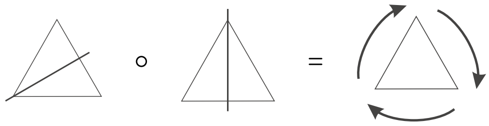
Sind $g_1, g_2 \in \mathrm{Sym}(D)$ dann ist $g_1 \circ g_2 \in \mathrm{Sym}(D)$ (d.h. die Verknüpfung ist wohldefiniert), denn



und analog für die restlichen Paare g_1, g_2. ■

Man bemerke, dass die Komposition von zwei Spiegelungen also eine Drehung ergibt.

Bemerkung 3.2.5 Sym(D) *ist nicht kommutativ, denn für die umgekehrte Reihenfolge der Spiegelungen erhalten wir*



Übung 3.1 gibt eine Interpretation der Symmetrien von D als bijektive Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ durch Nummerieren der Eckpunkte des Dreiecks.

Definition 3.2.6 *Ein* ***kommutativer Ring mit 1*** *ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen*

$$+ : R \times R \longrightarrow R, \ (a,b) \longmapsto a + b$$
$$\cdot : R \times R \longrightarrow R, \ (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

für die gilt

(R1) $(R,+)$ *ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0,

(R2) $(R,\cdot)$ *ist ein abelsches Monoid mit neutralem Element* 1, *und*

(R3) die Verknüpfungen sind distributiv, d.h.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

für alle $a, b, c \in R$.

Definition 3.2.7 *Ein kommutativer Ring R mit* 1 *heißt* ***Körper****, wenn $R \backslash \{0\}$ eine Gruppe ist.*

Es muss also jedes Element in $R \backslash \{0\}$ bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzen.

Im Folgenden konstruieren wir die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, und darauf Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sodass $\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit 1 wird. Danach konstruieren wir aus $\mathbb{Z}$ die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und darauf Verknüpfugen $+$ und $\cdot$, sodass $\mathbb{Q}$ ein Körper wird.

3.3 Konstruktion der ganzen Zahlen

Wir konstruieren $\mathbb{Z}$ als Menge von Äquivalenzklassen einer geeigneten Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$:

Lemma 3.3.1 *Auf* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *ist durch*

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation gegeben.

Dies beweisen wir in Übung 3.3.

Beispiel 3.3.2 *Es ist z.B.*

$$\begin{aligned} (4,0) \sim (5,1) \sim (6,2) \sim \ldots \\ (0,4) \sim (1,5) \sim (2,6) \sim \ldots \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} [(4,0)] = [(5,1)] = [(6,2)] = \ldots \\ [(0,4)] = [(1,5)] = [(2,6)] = \ldots \end{aligned}$$

Definition 3.3.3 *Die Menge der Äquivalenzklassen*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) / \sim$$

heißt Menge der ***ganzen Zahlen****.*

Satz 3.3.4 *Mit den Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} [(a,b)] + [(c,d)] &= [(a+c, b+d)] \\ [(a,b)] \cdot [(c,d)] &= [(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)] \end{aligned}$$

wird $\mathbb{Z}$ *zu einem kommutativen Ring mit* 1.

Beweis. Zunächst muss man zeigen, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind, d.h. das Ergebnis unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (a,b) von $[(a,b)]$ und (c,d) von $[(c,d)]$ ist. Wir zeigen dies hier für die Addition: Ist $[(a,b)] = [(a',b')]$ und $[(c,d)] = [(c',d')]$, d.h.

$$a + b' = a' + b \text{ und } c + d' = c' + d$$

dann gilt

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d$$

d.h.

$$[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$$

Weiter müssen wir gemäß Definition 3.2.6 zeigen, dass + und · assoziativ, distributiv und kommutativ sind, neutrale Elemente 0 und 1 für + und · existieren, und jedes Element ein Inverses bzgl. + hat. Zum Beispiel gilt für jedes $[(a, b)] \in \mathbb{Z}$ dass

$$[(a, b)] + [(b, a)] = [(a + b, b + a)] = [(0, 0)]$$

also hat $[(a, b)]$ ein additiv Inverses.

Zu der Wohldefiniertheit der Multiplikation und den verbleibenden Aussagen aus der Ringdefinition siehe Übung 3.3. ■

Eventuell fällt es leichter, erst Aufgabe 3.2 zu lösen, in der die Überprüfung der Ringeigenschaften sehr ähnlich funktioniert, aber keine Äquivalenzrelationen vorkommen.

Beispiel 3.3.5 *Die Wohldefiniertheit der Addition an einem Beispiel: Unabhängig davon, ob wir die Klasse* $[(4, 0)]$ *durch* $(4, 0)$ *oder* $(5, 1)$ *repräsentieren, erhalten wir dieselbe Summe mit* $[(0, 1)]$

$$\begin{array}{rl} [(4,0)] + [(0,1)] = [(4,1)] = & [(3,0)] \\ & \parallel \\ [(5,1)] + [(0,1)] = [(5,2)] = & [(3,0)] \end{array}$$

denn $4 + 0 = 3 + 1$ *und* $5 + 0 = 3 + 2$.

Bemerkung 3.3.6 *Durch Identifikation von* $n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $[(n, 0)]$ *können wir* $\mathbb{N}_0$ *als Teilmenge von* $\mathbb{Z}$ *auffassen.*

Notation 3.3.7 *Jedes Element von* $\mathbb{Z}$ *hat einen Repräsentanten der Form* $(a, 0)$ *oder* $(0, a)$. *Wir schreiben kurz*

$$\begin{aligned} a &= [(a, 0)] \\ -a &= [(0, a)] \\ 0 &= [(0, 0)] \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3.8 *Die einfachste Möglichkeit, um im Computer auch negative Zahlen darzustellen ist ein zusätzliches Vorzeichenbit. Dieses entscheidet, ob* $a \in \mathbb{N}_0$ *für* $[(a,0)]$ *oder* $[(0,a)]$ *steht. Allerdings hat dann* $0 = [(0,0)]$ *zwei Darstellungen als* 0 *und* -0*. Um dies zu vermeiden, verwendet man in der Informatik typischerweise das sogenannte* ***Zweierkomplement****. Hier wird zu einer* r*-Bit-Zahl* $(a_{r-1},...,a_0)$ *ein weiteres Bit hinzugefügt, dem man den Wert* -2^r *zuordnet. Mit diesem Verfahren hat jede Zahl in* $\{-2^r,...,0,...,2^r-1\}$ *eine eindeutige Darstellung.*

Beispiel 3.3.9 *In der Zweierkomplementdarstellung mit* $r = 7$ *schreibt sich die größtmögliche positive Zahl* 127 *als*

$$(0,1,1,1,1,1,1,1),$$

die 0 *hat die Darstellung*

$$(0,0,0,0,0,0,0,0),$$

-1 *erhalten wir als*

$$(1,1,1,1,1,1,1,1),$$

denn $-2^8+2^7+...+2^1+1=-1$ *(siehe den Beweis von Satz 2.4.1), und die kleinstmögliche negative Zahl* -128 *hat die Darstellung*

$$(1,0,0,0,0,0,0,0).$$

Bemerkung 3.3.10 *Explizite Formeln zur Bestimmung der Zweierkomplementdarstellung: Nichtnegative Zahlen* $0 \le n < 2^r$ *schreibt man*

$$n = -v \cdot 2^r + a_{r-1}2^{r-1} + ... + 2^1 a_1 + a_0$$

mit dem Vorzeichenbit $v = 0$ *und* $(a_{r-1},...,a_0) = \phi_{2,r}^{-1}(n)$.

Für negative Zahlen $-2^r \le n < 0$ *gilt*

$$n = -v \cdot 2^r + \bar{a}_{r-1}2^{r-1} + ... + 2^1 \bar{a}_1 + \bar{a}_0$$

mit dem Vorzeichenbit $v = 1$ *und* $(a_{r-1},...,a_0) = \phi_{2,s}^{-1}(-n-1)$.

Dabei bezeichnet

$$\bar{a} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 1 \\ 1 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

das ***Bit-Komplement****.*

Bemerkung 3.3.11 *Als Äquivalenzklasse wird* $0 \leq n < 2^r$ *im Zweierkomplement also repräsentiert durch*

$$n = [(n, 0)]$$

und $-2^r \leq n < 0$ *durch*

$$n = [(2^r - n,\ 2^r)].$$

Bemerkung 3.3.12 *Die Totalordnung* $\geq$ *auf* $\mathbb{N}$ *induziert durch*

$$[(a, b)] \geq [(c, d)] \Leftrightarrow a + d \geq b + c$$

eine Totalordnung auf $\mathbb{Z}$*.*

Satz 3.3.13 *Für alle* $n, m \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$n \cdot m = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ oder } m = 0$$

Einen Ring mit dieser Eigenschaft nennt man einen ***Integritätsring*** *oder* ***nullteilerfrei****.*

Beweis. Die Aussage gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Jedes Element von $\mathbb{Z}$ ist von der Form $[(a, 0)]$ oder $[(0, b)]$. Fallunterscheidung:

$$[(a, 0)] \cdot [(c, 0)] = [(a \cdot c, 0)] = [(0, 0)] \Leftrightarrow a \cdot c = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } c = 0$$
$$[(a, 0)] \cdot [(0, d)] = [(0, a \cdot d)] = [(0, 0)] \Leftrightarrow a \cdot d = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } d = 0$$
$$[(0, b)] \cdot [(0, d)] = [(b \cdot d, 0)] = [(0, 0)] \Leftrightarrow b \cdot d = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ oder } d = 0$$

■

3.4 Konstruktion der rationalen Zahlen

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein Ring ist. Insbesondere hat bezüglich der Addition jedes Element ein Inverses. Bezüglich der Multiplikation gilt zwar

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad (-1) \cdot (-1) = 1,$$

alle anderen ganzen Zahlen haben jedoch kein Inverses: Jedes $n \in \mathbb{Z}$ besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$n = \pm 1 \cdot p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{a_r}$$

mit Primzahlen p_i. Ist also

$$n \cdot m = 1$$

mit $n, m \in \mathbb{Z}$, dann folgt $n, m \in \{-1, 1\}$. Durch Bilden von Brüchen können wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren und damit dieses Problem beheben, z.B. gilt

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Der Preis dafür ist, dass es in $\mathbb{Q}$ keine Primfaktorisierung mehr gibt. Sowohl $\mathbb{Z}$ als auch $\mathbb{Q}$ haben also ihre Existenzberechtigung.

Lemma 3.4.1 *Auf* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ *ist durch*

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

eine Äquivalenzrelation gegeben.

Beweis. Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Ebenso ist sie transitiv: Sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$ also $a \cdot d = b \cdot c$ und $c \cdot f = e \cdot d$. Multiplikation mit f bzw. b liefert

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f = b \cdot e \cdot d$$

also

$$(a \cdot f - b \cdot e) \cdot d = 0.$$

Wegen $d \neq 0$ gibt Lemma 3.3.13, dass

$$a \cdot f = b \cdot e.$$

■

Beispiel 3.4.2 *Es gilt*

$$\begin{aligned} (4, 3) &\sim (12, 9) \\ (3, 4) &\sim (9, 12) \\ (0, 1) &\sim (0, 2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} [(4, 3)] &= [(12, 9)] \\ [(3, 4)] &= [(9, 12)] \\ [(0, 1)] &= [(0, 2)]. \end{aligned}$$

Definition 3.4.3 *Die Menge der Äquivalenzklassen*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \sim$$

heißt Menge der ***rationalen Zahlen****.*

Satz 3.4.4 *Mit den Verknüpfungen*

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$$
$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$$

wird $\mathbb{Q}$ zu einem Körper.

Beweis. Die Verknüpfungen sind wohldefiniert: Ist $[(a,b)] = [(a',b')]$ und $[(c,d)] = [(c',d')]$, dann

$$ab' = a'b \text{ und } cd' = c'd.$$

Dies impliziert, dass $acb'd' = a'c'bd$ und somit

$$[(ac, bd)] = [(a'c', b'd')],$$

also ist die Multiplikation wohldefiniert. Für die Addition siehe Aufgabe 3.4.

Das neutrale Element für die Addition ist $[(0,1)]$ und für die Multiplikation $[(1,1)]$. Die Kommutativität ist klar, Assoziativität und Distributivität sind eine leichte Übung (siehe Aufgabe 3.4).

Jedes $[(a,b)] \in \mathbb{Q}$ besitzt ein additiv Inverses:

$$[(a,b)] + [(-a,b)] = [(0,b^2)] = [(0,1)]$$

Das Inverse von $[(a,b)]$ mit $a \neq 0$ bezüglich der Multiplikation ist $[(b,a)]$, denn

$$[(a,b)] \cdot [(b,a)] = [(ab,ab)] = [(1,1)].$$

■

Notation 3.4.5 *Elemente der rationalen Zahlen schreiben wir kurz als* ***Bruch***

$$\frac{a}{b} = [(a,b)].$$

In dieser Notation sind dann Addition und Multiplikation

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Bemerkung 3.4.6 *Jede rationale Zahl ist von der Form $\frac{a}{b}$ mit $b \in \mathbb{N}$, z.B.*

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

Bemerkung 3.4.7 *Die Totalordnung $\geq$ auf $\mathbb{Z}$ induziert durch*

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \geq bc$$

für $b, d \in \mathbb{N}$ eine Totalordnung auf $\mathbb{Q}$.

Zum Beispiel ist

$$\frac{-2}{3} \geq \frac{-3}{4}$$

da

$$-8 \geq -9.$$

Bemerkung 3.4.8 *Im Computer werden rationale Zahlen $\frac{a}{b} = [(a, b)]$ durch ihren Repräsentanten $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ dargestellt.*

Typischerweise kürzt man den größten gemeinsamen Teiler von a und b

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot \mathrm{ggT}(a, b)}{d \cdot \mathrm{ggT}(a, b)} = \frac{c}{d}$$

mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, um Speicherplatz zu sparen. Zum Beispiel können wir in

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{16}{60} = \frac{4 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{4}{15}$$

nach der Addition kürzen.

In der Praxis ist es nicht immer sinnvoll, nach jeder arithmetischen Operation zu kürzen, da die Bestimmung des ggT teuer ist. Stattdessen entwickelt man für eine konkrete Situation eine Heuristik, die entscheidet, wann gekürzt werden soll (z.B. anhand der Bitgröße von a und b).

3.5 Abzählbarkeit

Sowohl $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ als auch $\mathbb{Q}$ haben unendlich viele Elemente und offenbar ist

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}.$$

Aber hat $\mathbb{Q}$ wesentlich mehr Elemente als $\mathbb{N}$, und führt dies zu Problemen in der Informatik? Diese Frage wollen wir im Folgenden präzisieren und beantworten.

Beispiel 3.5.1 *Nehmen wir an, dass eine gegebene Aussage $A(n)$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ korrekt ist, und wir wollen ein solches n finden. Das Programm*

```
n=1;
while not A(n) do
    n=n+1;
od;
```

terminiert nach endlicher Zeit mit dem gesuchten n.

Ist zum Beispiel $A(n)$ die Aussage $n^2 \geq 8$, dann terminiert unser Programm mit $n = 3$.

Können wir genauso für eine Aussage $A(q)$ mit $q \in \mathbb{Q}$ vorgehen? Die Antwort ist ja, falls wir eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ finden können.

Definition 3.5.2 *Eine Menge M heißt* ***abzählbar****, wenn es eine surjektive Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \to M$ gibt. Anderenfalls heißt M* ***überabzählbar****.*

Beispiel 3.5.3 *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar mit $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert durch*

$\alpha(1)$	$\alpha(2)$	$\alpha(3)$	$\alpha(4)$	$\alpha(5)$	$\alpha(6)$	...
0	1	-1	2	-2	3	...

Satz 3.5.4 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis. Sei $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wie in Beispiel 3.5.3. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ & (i,j) & \mapsto & \frac{\alpha(i)}{j} \end{array}$$

ist surjektiv, da sich jede rationale Zahl mit einem Zähler aus $\mathbb{Z}$ und einem Nenner aus $\mathbb{N}$ darstellen lässt. Weiter erhalten wir eine surjektive Abbildung $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$\begin{array}{|llll} \hline \gamma(1) & \gamma(3) & \gamma(6) & \cdots \\ \gamma(2) & \gamma(5) & & \\ \gamma(4) & & & \\ \vdots & & & \end{array} = \begin{array}{|llll} \hline (1,1) & (2,1) & (3,1) & \cdots \\ (1,2) & (2,2) & & \\ (1,3) & & & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Nach Aufgabe 2.12 ist auch $\beta \circ \gamma$ surjektiv. Diese Methode $\mathbb{Q}$ abzuzählen heißt **erstes Cantorsches Diagonalverfahren**. ∎

Beispiel 3.5.5 *Für die im Beweis von Satz 3.5.4 konstruierte Abbildung schreiben wir die Elemente von* $\mathbb{Q}$ *als*

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \cdots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & & \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & & & \\
\frac{0}{4} & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

und zählen diagonal ab

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{4}, \ldots$$

Beachte: Da rationale Zahlen in dem Schema mehrfach vorkommen, ist die Abbildung nicht injektiv.

Nun noch zu einem Beispiel einer überabzählbaren Menge. Dazu verwenden wir:

Satz 3.5.6 *Sei* M *eine Menge. Es gibt keine surjektive Abbildung* $M \to 2^M$.

Beweis. Angenommen wir haben eine surjektive Abbildung $\varphi : M \to 2^M$. Wir betrachten

$$D := \{m \in M \mid m \notin \varphi(m)\}$$

$D \subset M$, also $D \in 2^M$, und φ ist nach Annahme surjektiv $\Rightarrow$

$$\exists a \in M : \varphi(a) = D$$

- Ist $a \in D \Rightarrow a \notin \varphi(a) = D$ ein Widerspruch.
- Ist $a \notin D = \varphi(a) \Rightarrow a \in D$ ein Widerspruch.

∎

In Übungsaufgabe 3.6 zeigen wir die analoge Aussage für injektive Abbildungen.

Bemerkung 3.5.7 *Für eine endliche Menge M folgt Satz 3.5.6 auch aus Satz 2.1.16: Mit vollständiger Induktion sieht man leicht, dass $n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Aus Satz 3.5.6 folgt direkt mit $M = \mathbb{N}$:

Corollar 3.5.8 *Die Menge $2^{\mathbb{N}}$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.*

In Übung 3.7 zeigen wir, dass dagegen die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

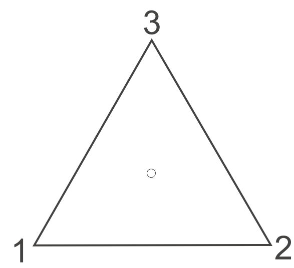
Sobald wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen konstruiert haben, werden wir beweisen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

3.6 Übungsaufgaben

Übung 3.1 *Sei X eine endliche Menge mit n Elementen.*

1) *Wieviele bijektive Abbildungen $X \to X$ gibt es? Beweisen Sie Ihre Behauptung.*

2) *Sei D ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken $1, 2, 3$:*



Geben Sie für alle bijektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ eine geometrische Interpretation als Symmetrie von D.

Übung 3.2 *Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^2$ zusammen mit der Addition und der Multiplikation*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$$

zu einem kommutativen Ring mit 1 wird. Dieser heißt Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$.

Welche Elemente von $\mathbb{Z}[i]$ haben ein Inverses bezüglich der Multiplikation?

Übung 3.3 *Zeigen Sie:*

1) *Auf* $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *ist durch*

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation gegeben.

2) *Die Verknüpfungen Addition und Multiplikation*

$$\begin{aligned} [(a,b)] + [(c,d)] &= [(a+c, b+d)] \\ [(a,b)] \cdot [(c,d)] &= [(a\cdot c + b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)] \end{aligned}$$

auf $\mathbb{Z} = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) / \sim$ *sind wohldefiniert, assoziativ, kommutativ und distributiv.*

Übung 3.4 *Auf* $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ *ist durch*

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen Addition und Multiplikation

$$\begin{aligned} [(a,b)] + [(c,d)] &= [(ad + bc, bd)] \\ [(a,b)] \cdot [(c,d)] &= [(ac, bd)] \end{aligned}$$

auf $\mathbb{Q} = M/\sim$ *wohldefiniert, assoziativ, kommutativ und distributiv sind.*

Übung 3.5 *Schreiben Sie ein Programm, das* $\mathbb{Q}$ *abzählt.*

Wie können Sie das Programm modifizieren, dass es eine bijektive Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

konstruiert.

Übung 3.6 *Sei* M *eine* unendliche *Menge. Zeigen Sie, dass es keine injektive Abbildung* $\psi : 2^M \to M$ *gibt.*

Übung 3.7 *Zeigen Sie: Die Menge aller endlichen Teilmengen von* $\mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Hinweis: Assoziieren Sie zu jeder endlichen Teilmenge eine Binärzahl.

4

Kombinatorik

4.1 Übersicht

In der Kombinatorik untersucht man endliche oder abzählbar unendliche Strukturen in der Mathematik.

Die abzählende Kombinatorik beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl der Elemente von endlichen Mengen. Eine klassische Fragestellung ist: Wieviele Teilmengen hat eine endliche Menge M? Diese Frage haben wir schon in Satz 2.1.16 beantwortet: Die Potenzmenge 2^M hat $2^{|M|}$ Elemente. Die abzählende Kombinatorik ist von zentraler Bedeutung für das Design und die Analyse von Algorithmen in der Informatik. Um die Performance oder den Speicherverbrauch eines Algorithmus (z.B. zur Bestimmung von 2^M) abzuschätzen, ist es etwa wichtig zu verstehen, wieviele Schritte er benötigt, um das Ergebnis zu liefern. Eine andere Anwendung liegt in der Stochastik. Zum Beispiel ist (unter der Voraussetzung, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind) die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto

$$\frac{1}{\binom{49}{6}}$$

wobei $\binom{49}{6}$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse bezeichnet.

Ein anderer Teilbereich der Kombinatorik ist die Graphentheorie. Graphen wie in Abbildung 1 sind eine der wichtigsten Datenstrukturen in der Informatik. Sie bestehen aus Ecken und Kanten (eventuell mit einer Länge). In einem Graphen (etwa dem

Schienennetz der Bahn) will man z.B. herausfinden, welcher Weg der kürzeste zwischen zwei gegebenen Ecken ist.

Viele weitere Teilbereiche der Kombinatorik, die wir hier nicht ansprechen können, sind ebenfalls relevant für die Informatik, etwa Matroide und Designs.

4.2 Binomialkoeffizienten

Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge haben wir schon bestimmt. Aber wieviele Teilmengen mit einer vorgegebenen Anzahl k von Elementen gibt es?

Definition 4.2.1 *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.*

Für $k \in \mathbb{Z}$ negativ setzen wir $\binom{n}{k} = 0$.

Definition 4.2.2 *Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und M eine Menge, dann schreiben wir $\binom{M}{k}$ für die Menge der k-elementigen Teilmengen von M.*

Zunächst eine grundlegende Symmetrieeigenschaft von Binomialkoeffizienten:

Proposition 4.2.3 *Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Beweis. Für $k < 0$ oder $k > n$ sind beide Seiten 0. Anderenfalls sei M eine n-elementige Menge M. Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \binom{M}{k} & \to & \binom{M}{n-k} \\ & U & \mapsto & M \backslash U \end{array}$$

ist bijektiv:

- injektiv: Falls $M \backslash U_1 = M \backslash U_2$ für $U_i \subset M$, dann $U_1 = U_2$.
- surjektiv: Sei $V \in \binom{M}{n-k}$. Es gilt $\alpha(M \backslash V) = M \backslash (M \backslash V) = V$.

■

Der Beweis sagt nichts anderes als, dass die Auswahl von k Elementen aus n die verbleibenden $n-k$ Elemente festlegt und umgekehrt.

Beispiel 4.2.4 *Wir illustrieren den Beweis an einem Beispiel: Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \binom{\{1,2,3\}}{1} &\to \binom{\{1,2,3\}}{2} \\ \{1\} &\mapsto \{2,3\} \\ \{2\} &\mapsto \{1,3\} \\ \{3\} &\mapsto \{1,2\} \end{aligned}$$

ist bijektiv, also $\binom{3}{1} = \binom{3}{2}$.

Beispiel 4.2.5 *Beim Lotto-Glücksspiel werden aus einem Topf von* 49 *nummerierten Kugeln* 6 *Kugeln gezogen. Da die Kugeln unterscheidbar sind, ist die Menge der möglichen Lottoergebnisse*

$$\binom{\{1,...,49\}}{6} = \{\{1,2,3,4,5,6\},...\}$$

und die Anzahl der möglichen Ergebnisse die Anzahl der 6*-elementigen Teilmengen einer* 49*-elementigen Menge, d.h.*

$$\binom{49}{6}.$$

Wie groß ist diese Zahl?

Um diese Frage zu beantworten, leiten wir im Folgenden eine geschlossene Formel für $\binom{n}{k}$ her.

Proposition 4.2.6 *Für alle* $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$$

Beweis. Sei M eine Menge mit $|M| = n+1$. Die Menge

$$F = \left\{(m,U) \in M \times \binom{M}{k+1} \mid m \in U\right\}$$

können wir anschaulich interpretieren als die Menge aller $(k+1)$-elementigen Teilmengen $U \subset M$, wobei ein $m \in U$ markiert wird. Wir können die Elemente von F auf zwei Weisen abzählen:

- Wähle eine Teilmenge $U \subset M$ mit $|U| = k+1$ und wähle ein $m \in U$ aus. Dies zeigt, dass
$$|F| = \binom{n+1}{k+1}(k+1).$$
- Wähle $m \in M$ beliebig, wähle k Elemente aus $M \backslash \{m\}$, und bilde daraus die Menge U. Dies zeigt, dass
$$|F| = (n+1)\binom{n}{k}.$$

■

Beispiel 4.2.7 *Wir illustrieren den Beweis an einem Beispiel: Sei $n = 3$ und $k = 2$. Wir können $M = \{1,2,3,4\}$ annehmen. Im Folgenden stellen wir die Elemente $(m,U) \in F$ dar als U mit einer Markierung $m \in U$.*

Wählen wir zunächst $m \in M$ und ergänzen zu einer 3-elementigen Teilmenge von M, so erhalten wir folgende Abzählung der Elemente von F

m	1	2	3	4
	$\{\mathbf{1},2,3\}$	$\{\mathbf{2},1,3\}$	$\{\mathbf{3},1,2\}$	$\{\mathbf{4},1,2\}$
	$\{\mathbf{1},2,4\}$	$\{\mathbf{2},1,4\}$	$\{\mathbf{3},1,4\}$	$\{\mathbf{4},1,3\}$
	$\{\mathbf{1},3,4\}$	$\{\mathbf{2},3,4\}$	$\{\mathbf{3},2,4\}$	$\{\mathbf{4},2,3\}$

mit insgesamt $4 \cdot \binom{3}{2}$ Elementen.

Wählen wir zunächst eine 3-elementige Teilmenge $U \subset M$ und markieren dann ein Element $m \in U$, bekommen wir folgende Abzählung der Elemente von F

U	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$
	$\{\mathbf{1},2,3\}$	$\{\mathbf{1},2,4\}$	$\{\mathbf{1},3,4\}$	$\{\mathbf{2},3,4\}$
	$\{1,\mathbf{2},3\}$	$\{1,\mathbf{2},4\}$	$\{1,\mathbf{3},4\}$	$\{2,\mathbf{3},4\}$
	$\{1,2,\mathbf{3}\}$	$\{1,2,\mathbf{4}\}$	$\{1,3,\mathbf{4}\}$	$\{2,3,\mathbf{4}\}$

mit insgesamt $\binom{4}{3} \cdot 3$ Elementen. Dies zeigt, dass
$$4 \cdot \binom{3}{2} = |F| = \binom{4}{3} \cdot 3.$$

Corollar 4.2.8 *Für $0 \le k \le n$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

wobei

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

***n*-Fakultät** *bezeichnet.*

Beweis. Induktion nach k:
Induktionsanfang $k = 0$: $\binom{n}{0} = 1$
Induktionsschritt: $k-1 \mapsto k$: Proposition 4.2.6 und die Induktionsvoraussetzung geben

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

■

Beispiel 4.2.9 *Beim Lottospiel gibt es*

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

Möglichkeiten.

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch rekursiv berechnen. Dazu verwenden wir:

Proposition 4.2.10 (Vandermonde Identität) *Für alle $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Beweis. Seien A und B disjunkte Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $A \cup B$ ist $\binom{n+m}{k}$. Andererseits ist $\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen $U \subset A \cup B$ mit $|U \cap A| = j$. ■

Beispiel 4.2.11 *Wir illustrieren den Beweis an einem Beispiel: Sei* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ *und* $k = 4$. *Die* 4*-elementigen Teilmengen von* $A \cup B$ *sind*

$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}.$$

Diese sortieren wir nach der Anzahl j *der Elemente aus* A*: Für* $j = 1$ *erhalten wir*

$$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\}$$

und für $j = 2$

$$\{1,2,4,5\},\{1,3,4,5\},\{2,3,4,5\}$$

$j = 0,3,4$ *leisten keinen Beitrag. Dies zeigt, dass*

$$\binom{5}{4} = \binom{3}{3}\binom{2}{1} + \binom{3}{2}\binom{2}{2}.$$

Corollar 4.2.12 *Es gilt*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beweis. Proposition 4.2.10 gibt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{n}{j}\binom{1}{k+1-j} = \binom{n}{k}\cdot 1 + \binom{n}{k+1}\cdot 1.$$

■

Siehe auch Übung 4.1.

Bemerkung 4.2.13 *Aus den Anfangswerten* $\binom{0}{0} = 1$ *und* $\binom{0}{k} = 0$ *für* $k \neq 0$ *erhalten wir alle anderen Binomialkoeffizienten mittels der Rekursionsgleichung aus Corollar 4.2.12. In dem* ***Pascalschen Dreieck***

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow
\end{array}$$

ist also jeder Eintrag (ausser den Anfangswerten) die Summe der beiden über ihm liegenden Einträge (wobei wir Binomialkoeffizienten gleich 0 *nicht schreiben):*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Beispielsweise gilt

$$3 = \binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2.$$

Abschließend zeigen wir noch einen wichtigen Satz, der den Binomialkoeffizienten ihren Namen gegeben hat. Dazu verwenden wir:

Definition und Satz 4.2.14 *Der* ***Polynomring*** $K[X]$ *über einem Körper* K *in der Unbestimmten* X *ist die Menge aus* 0 *und allen Ausdrücken (**Polynome**)*

$$f = a_0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$. *Wir nennen* $\deg(f) := n$ *den* ***Grad*** *von* f *und setzen* $\deg(0) = -\infty$.
Mit der Addition

$$\begin{aligned}&\left(a_0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n\right) + \left(b_0 + b_1 X^1 + \ldots + b_m X^m\right)\\ &= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) X^i\end{aligned}$$

(wobei wir $a_i = 0$ *für* $i > n$ *und* $b_i = 0$ *für* $i > m$ *setzen), und der Multiplikation*

$$\begin{aligned}&\left(a_0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n\right) \cdot \left(b_0 + b_1 X^1 + \ldots + b_m X^m\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) X^i,\end{aligned}$$

wird $K[X]$ *ein kommutativer Ring mit* 1.

Für den Beweis siehe Aufgabe 4.4.

Beispiel 4.2.15 *In* $\mathbb{Q}[X]$ *gilt*

$$\begin{aligned}(1+2X+X^2)\cdot(1+X) &= (1+2X+X^2)+(X+2X^2+X^3)\\ &= 1+3X^2+3X+X^3.\end{aligned}$$

Mit MAPLE *können wir diese Rechnung folgendermaßen durchführen:*

```
f:=(1+2*X+X^2)*(1+X);
```
$(1+2X+X^2)\cdot(1+X)$
```
expand(f);
```
$1+3X+3X^2+X^3$

Summanden mit $a_i = 0$ in $f = a_0 + a_1X^1 + ... + a_nX^n$ schreibt man üblicherweise nicht. Ein Polynom der Form $f = X^n$ bezeichnen wir auch als **Monom**, $f = a_nX^n$ als **Term**, und $f = a_mX^m + a_nX^n$ als **Binom**.

Bemerkung 4.2.16 *In der Informatik stellt man ein Polynom* $f = a_0 + a_1X^1 + ... + a_nX^n$ *meist durch die Liste*

$$(a_0, ..., a_n) \in K^{n+1}$$

seiner Koeffizienten a_i *dar (sogenannte* ***dicht besetzte Darstellung*** *von Polynomen). Haben die betrachteten Polynome allerdings nur wenige Koeffizienten* $a_i \neq 0$ *ist es effizienter das Polynom als die Menge von Tupeln*

$$\{(i,a_i) \mid a_i \neq 0\} \subset \mathbb{N}_0 \times K$$

*zu speichern (****dünn besetzte Darstellung****).*

Beispielsweise würden wir das Polynom $f = 7 + 13\cdot X^{10}$ *darstellen als*

$$f = (7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,13)$$

oder als

$$f = \{(0,7),(10,13)\}.$$

Für die Implementierung der Polynomarithmetik siehe Aufgabe 4.4.

Bemerkung 4.2.17 *Jedem Polynom*

$$p = a_0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n \in K[X]$$

ist durch ***Einsetzen*** *eines Werts $x \in K$ für die Variable X ein Wert*

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \in K$$

zugeordnet.

Durch Einsetzen kann somit zu jedem Polynom $p \in K[X]$ eine Abbildung

$$K \to K,\ x \mapsto p(x)$$

assoziiert werden.

Beispiel 4.2.18 *Die durch das Polynom $p = X^2 \in \mathbb{R}[X]$ gegebene Abbildung ist die Parabelfunktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

aus Abbildung 2.4.

Bemerkung 4.2.19 *Für alle $p, q \in K[X]$ und $c \in K$ gilt*

$$(p \cdot q)(c) = p(c) \cdot q(c)$$

$$(p + q)(c) = p(c) + q(c).$$

Es ist also egal, ob wir erst einsetzen und dann Elemente aus K multiplizieren/addieren, oder erst Polynome multiplizieren/addieren und dann einsetzen. Für den (leichten) Beweis siehe Aufgabe 4.3.

Man sagt dazu auch: Für jedes $c \in K$ ist die Einsetzabbildung $K[X] \to K,\ p \mapsto p(c)$ ein ***Ringhomomorphismus****.*

Der Binomialsatz beschreibt, wie man Potenzen von Binomen berechnet:

Satz 4.2.20 (Binomialsatz) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(X + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

Beweis. Ausmultiplizieren mit dem Distributivgesetz gibt

$$\overbrace{(X+1)\cdot\ldots\cdot(X+1)}^{n} = \sum_{T\subset\{1,\ldots,n\}} X^{|T|}$$

denn jeder Faktor $(X+1)$ auf der linken Seite trägt zu jedem Summanden auf der rechten Seite mit X oder 1 bei. Wir nummerieren die Faktoren von $1,\ldots,n$ und interpretieren T als die Menge der Faktoren die mit X beitragen und das Komplement von T als die Menge der Faktoren die mit 1 beitragen.

Da es $\binom{n}{k}$ Teilmengen $T\subset\{1,\ldots,n\}$ mit $|T|=k$ gibt, folgt

$$\sum_{T\subset\{1,\ldots,n\}} X^{|T|} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k.$$

■

Beispiel 4.2.21 *Für $n=2$ interpretieren wir im Beweis von Satz 4.2.20 die Menge $T\subset\{1,2\}$ als*

T	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\varnothing$
Summand	$X\cdot X$	$X\cdot 1$	$1\cdot X$	$1\cdot 1$

und erhalten

$$\begin{aligned}(X+1)^2 &= X\cdot X + X\cdot 1 + 1\cdot X + 1\cdot 1\\ &= X^2+2X+1\end{aligned}$$

Beispiel 4.2.22 *Satz 4.2.20 gibt*

$$\begin{aligned}(X+1)^1 &= X+1\\ (X+1)^2 &= X^2+2X+1\\ (X+1)^3 &= X^3+3X^2+3X+1\\ (X+1)^4 &= X^4+4X^3+6X^2+4X+1\\ (X+1)^5 &= X^5+5X^4+10X^3+10X^2+5X+1\end{aligned}$$

mit den Binomialkoeffizienten aus Bemerkung 4.2.13.

Beispiel 4.2.23 *Bei einer jährlichen Verzinsung $0 < x < 1$ des Kapitals m, erhält man nach n Jahren von der Bank (hoffentlich)*

$$m \cdot (1+x)^n = m \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n.$$

Für kleines x erhalten wir mit dem konstanten und linearen Term der Binomialformel die Approximation

$$m \cdot (1+x)^n \approx m \cdot (1 + n \cdot x).$$

In der Praxis bedeutet dies die Vernachlässigung von Zinseszinsen. Durch Hinzufügen weiterer Terme ansteigender x-Potenz in der Binomialformel lässt sich die Näherung verbessern, etwa zu

$$m \cdot (1+x)^n \approx m \cdot (1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2} x^2).$$

Beispielsweise für $x = \frac{1}{100}$ und $n = 3$ wird

$$(1 + \frac{1}{100})^3 = 1.030301$$

durch

$$1 + 3 \cdot \frac{1}{100} = 1.03$$

bzw.

$$1 + 3 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{10000} = 1.0303$$

approximiert.

Für den Beweis der Siebformel im folgenden Abschnitt zeigen wir noch ein Corollar zum Binomialsatz:

Corollar 4.2.24 *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis. Sei $f = (X+1)^n$ und $g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$. Mit Bemerkung 4.2.19 ist $f(-1) = (-1+1)^n = 0$. Andererseits ist $g(-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$. Wegen Satz 4.2.20 gilt $f = g$ also auch $f(-1) = g(-1)$. ∎

Beispiel 4.2.25 *Es gilt*

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

4.3 Siebformel

Bevor wir als Anwendung von Binomialkoeffizienten im nächsten Abschnitt die Catalanzahlen diskutieren, leiten wir noch als eine wichtige Folgerung aus Corollar 4.2.24 die Siebformel her. Für die Vereinigung von zwei Mengen M_1, M_2 gilt die bekannte Formel

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$$

(siehe Übung 2.3). Diese Beziehung bezeichnet man auch als das Prinzip der Inklusion und Exklusion. Die Siebformel verallgemeinert diese Formel auf eine beliebige Anzahl n endlicher Mengen $M_1, ..., M_n$: Sie setzt die Anzahl der Elemente von $M_1 \cup ... \cup M_n$ mit der Anzahl der Elemente der Durchschnitte

$$M_T = \bigcap_{i \in T} M_i$$

für alle $T \subset \{1, ..., n\}$ in Beziehung.

Satz 4.3.1 (Siebformel) *Für Mengen $M_1, ..., M_n$ gilt*

$$|M_1 \cup ... \cup M_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{|T|=k} |M_T|$$

Beispiel 4.3.2 *Für drei Mengen erhalten wir*

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = &|M_1| + |M_2| + |M_3| \\ &- |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| \\ &+ |M_1 \cap M_2 \cap M_3|\end{aligned}$$

siehe auch Abbildung 4.1.

Nun zum Beweis von Satz 4.3.1:

Beweis. Sei $x \in M_1 \cup ... \cup M_n$. Wir wollen zeigen, dass x zu der rechten Seite genau mit 1 beiträgt. Angenommen x liegt in genau r der Mengen M_i, **ohne Einschränkung der Allgemeinheit** $x \in M_1 \cap ... \cap M_r$. Das soll heißen, dass das folgende Argument für alle anderen Möglichkeiten (z.B. $x \in M_2 \cap ... \cap M_{r+1}$) genauso anwendbar ist und dasselbe Ergebnis liefert. Man schreibt kurz auch **OE** für ohne Einschränkung der Allgemeinheit.

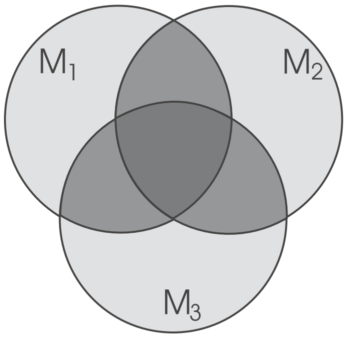


Abbildung 4.1: Siebformel für drei Mengen.

Dann wird x in $\sum_{|T|=k} |M_T|$ genau $\binom{r}{k}$-mal gezählt, in jedem Durchschnitt von k der $M_1, ..., M_r$ genau 1-mal. Insgesamt trägt x also zu der rechten Seite mit

$$a = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k}$$

bei. Da mit Corollar 4.2.24

$$0 = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k} \binom{r}{k} = 1 - a$$

gilt, ist $a = 1$. ■

Beispiel 4.3.3 *Wir illustrieren den Beweis für $n = 3$: Sei z.B. $r = 2$ also OE $x \in M_1 \cap M_2$ und $x \notin M_1 \cap M_2 \cap M_3$, siehe Abbildung 4.2. Es gibt folgende Möglichkeiten für Teilmengen $T \subset \{1, ..., n\}$ mit $x \in M_T$:*

k	$(-1)^{k-1}$	T *mit* $x \in M_T$
1	1	$\{1\}, \{2\}$
2	-1	$\{1, 2\}$
3	1	

Somit trägt x zu der rechten Seite mit

$$(1 + 1) - 1 + 0 = \binom{2}{1} - \binom{2}{2} + \binom{2}{3} = 1$$

bei. Genauso geht man für $r = 1$ bzw. $r = 3$ vor und erhält

$$1 - 0 + 0 = \binom{1}{1} - \binom{1}{2} + \binom{1}{3} = 1$$

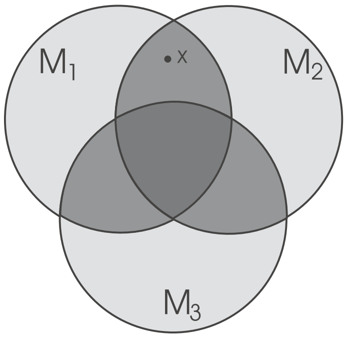


Abbildung 4.2: Beitrag zur Siebformel für $r = 2$.

bzw.

$$(1+1+1) - (1+1+1) + 1 = \binom{3}{1} - \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1.$$

Beispiel 4.3.4 *Mit der Siebformel können wir die Anzahl der Primzahlen ≤ 40 bestimmen: In der Primfaktorisierung einer Zahl $n \leq 40$ ist der kleinste Primfaktor $p \leq 6$ (also $2, 3$ oder 5), denn gilt $n = p \cdot q$ mit $p \leq q$, dann ist $p^2 \leq p \cdot q = n$.*

Sei T_m die Menge der durch m teilbaren Zahlen ≤ 40, also

$$T_m = \{a \cdot m \mid a \in \mathbb{N} \text{ mit } a \cdot m \leq 40\}.$$

Somit ist

$$|T_m| = \left\lfloor \frac{40}{m} \right\rfloor$$

wobei $\lfloor q \rfloor$ die Abrundung von q, also die größte ganze Zahl $\leq q$ bezeichnet. Für $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$ haben wir

$$T_{m_1} \cap T_{m_2} = T_{m_1 \cdot m_2}$$

denn eine Zahl ist durch m_1 und m_2 teilbar genau dann, wenn sie durch $\mathrm{kgV}(m_1, m_2) = \frac{m_1 \cdot m_2}{\mathrm{ggT}(m_1, m_2)} = m_1 \cdot m_2$ teilbar ist. Somit gilt

$$T_2 \cap T_3 = T_6 \qquad T_2 \cap T_5 = T_{10} \qquad T_3 \cap T_5 = T_{15}$$
$$T_2 \cap T_3 \cap T_5 = T_{30}$$

Die Siebformel liefert dann

$$\begin{aligned}|T_2 \cup T_3 \cup T_5| &= |T_2| + |T_3| + |T_5| \\ &\quad - |T_6| - |T_{10}| - |T_{15}| \\ &\quad + |T_{30}| \\ &= (20+13+8) - (6+4+2) + 1 \\ &= 30\end{aligned}$$

Somit gibt es genau $30 - 3 = 27$ *zusammengesetzte Zahlen* ≤ 40 *(denn* $2, 3, 5 \in T_2 \cup T_3 \cup T_5$ *sind prim), also genau*

$$40 - 1 - 27 = 12$$

Primzahlen (denn 1 *ist nicht prim).*

In Maple *erhalten wir diese Primzahlen wie folgt:*

```
L:=[ ];
for j from 1 to 40 do
    if isprime(j) then L:=[op(L),j];fi;
od:
L;
[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37]
```

Bemerkung 4.3.5 *Die* Maple*-Funktion* `isprime` *ist ein* ***probabilistischer Primzahltest****, d.h für* $n \in \mathbb{Z}$ *beweist das Ergebnis* `isprime(n)=false`*, dass* n *echt zusammengesetzt ist. Andererseits bedeutet* `isprime(n)=true` *nur, dass* n *mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit eine Primzahl ist.*

Es ist keine Zahl n *bekannt, für die* `isprime` *fälschlicherweise* `true` *liefert, und man vermutet, dass ein solches* n *mehrere hundert Dezimalstellen haben muss.*

4.4 Anwendung: Vollständige Klammerungen und Catalan-Zahlen

Im Folgenden diskutieren wir noch eine Anwendung von Binomialkoeffizienten in der Informatik genauer. Nehmen wir an, wir wollen im Computer $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ berechnen. Prozessoren können stets in jedem Schritt nur eine arithmetische Operation ausführen. Auch im Sinn der Mathematik ist die Addition und die Multiplikation in einem Ring eine Abbildung mit zwei Argumenten

$$\begin{aligned} + &: R \times R \to R \\ \cdot &: R \times R \to R \end{aligned}$$

Wir müssen den Ausdruck also so klammern, dass stets nur zwei Zahlen verknüpft werden. Man spricht dann auch von einer **vollständigen Klammerung**. Da die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ assoziativ ist, spielt die Wahl der Klammerung für das Ergebnis keine Rolle:

$$(2 \cdot (3 \cdot 4)) = 2 \cdot 12 = 24 = 6 \cdot 4 = ((2 \cdot 3) \cdot 4).$$

Beinhaltet der Ausdruck sowohl Additionen als auch Multiplikationen, dann ist die der Klammerung auch für seine syntaktische Analyse im Computer wichtig, denn das Ergebnis hängt im Allgemeinen von der Klammerung ab z.B.

$$((2 \cdot 3) + 4) \neq (2 \cdot (3 + 4)).$$

In unserem Beispiel $2 \cdot 3 \cdot 4$ gibt es offenbar zwei Möglichkeiten das Produkt zu klammern. Im Folgenden wollen wir beantworten wieviele vollständige Klammerungen es für ein Produkt

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_m$$

aus m Faktoren x_i in einem Ring R gibt.

Beispiel 4.4.1 *Für 4 Faktoren gibt es folgende Klammerungen*

$$\begin{gathered} (x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))) \\ (x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)) \\ ((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)) \\ ((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4) \\ (((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4) \end{gathered}$$

Definition 4.4.2 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die* ***Catalan-Zahl*** *c_n die Anzahl der vollständigen Klammerungen eines Produkts $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$ aus $n + 1$ Faktoren.*

Offenbar gilt $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ und wie gerade gesehen ist $c_2 = 2$ und $c_3 = 5$. Über die folgende Rekursionsgleichung können wir alle c_n berechnen:

Satz 4.4.3 *Es gilt $c_0 = 1$ und*

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-1-j}$$

für $n \geq 1$.

Beispiel 4.4.4 *Nach dem Satz gilt also z.B.*

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1\\
c_1 &= c_0^2 = 1\\
c_2 &= c_0c_1 + c_1c_0 = 2\\
c_3 &= c_0c_2 + c_1^2 + c_2c_0 = 5\\
c_4 &= c_0c_3 + c_1c_2 + c_2c_1 + c_0c_3 = 14
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun Satz 4.4.3:

Beweis. Sei K_n die Menge der vollständig geklammerten Produkte aus $n+1$ beliebigen Faktoren, also $c_n = |K_n|$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=0}^{n-1} K_j \times K_{n-1-j} &\to K_n\\
(p,q) &\mapsto (p \cdot q)
\end{aligned}$$

eine bijektive Abbildung, denn sie hat eine Umkehrabbildung: Jedes Element von K_n (mit $n+1$ Faktoren) lässt sich eindeutig in die zwei Produkte $p \in K_j$ (mit $j+1$ Faktoren) und $q \in K_{n-1-j}$ (mit $n-j$ Faktoren) in der äußersten Klammer zerlegen.

Die Formel folgt dann, da die Vereinigung disjunkt ist, mit Übung 2.3. ■

Beispiel 4.4.5 *Wir illustrieren die Zerlegung im Beweis an Beispiel 4.4.1:*

$(p \cdot q)$	p	q
$(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$	x_1	$(x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))$
$(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4))$	x_1	$((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)$
$((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4))$	$(x_1 \cdot x_2)$	$(x_3 \cdot x_4)$
$((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4)$	$(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$	x_4
$(((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4)$	$(x_1 \cdot x_2)$	x_4

Man erhält also

$$c_3 = 5 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = c_0 c_2 + c_1^2 + c_2 c_0.$$

Können wir eine geschlossene Formel für die Catalan-Zahlen herleiten? Zunächst bemerken wir:

Satz 4.4.6 *Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der vollständigen Klammerungen von $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$ und der Menge der kürzesten, überhalb der Winkelhalbierenden verlaufenden Wege in einem $(n+1) \times (n+1)$-Gitter (Abbildung 4.3).*

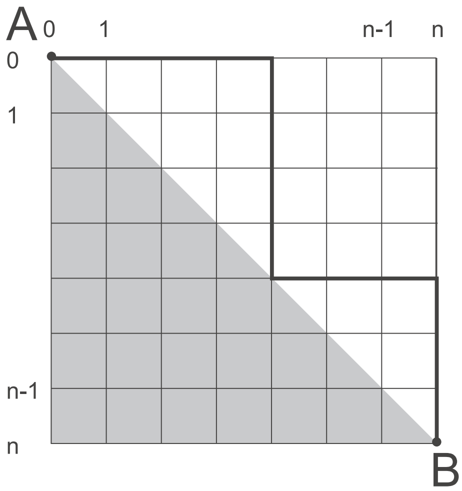


Abbildung 4.3: Kürzeste Wege überhalb der Winkelhalbierenden in einem quadratischen Gitter

Beweis. Offenbar ist durch folgende Vorschrift eine Abbildung gegeben:

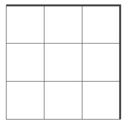
1) Streiche in der Klammerung die Symbole x_i und die Klammern (.

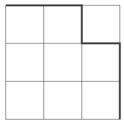
2) Durchlaufe die verbleibenden Symbole von links nach rechts und gehe für jedes $\cdot$ in dem Gitter nach rechts und für jede Klammer) nach unten.

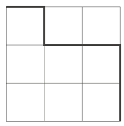
Eine solche Abbildungsvorschrift bezeichnet man in der Informatik auch als einen **Automaten**.

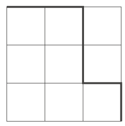
Die Abbildung ist wohldefiniert, da wir jeder Klammer) eine Multiplikation links davon zuordnen können. Um zu zeigen, dass die Abbildung bijektiv ist, konstruiere man als Übung die Umkehrabbildung. ∎

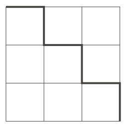
Beispiel 4.4.7 *In Beispiel 4.4.1 ordnen wir zu*

$(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))) \mapsto \cdot\cdot\cdot))) \mapsto$ 

$(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)) \mapsto \cdot\cdot)\cdot)) \mapsto$ 

$((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)) \mapsto \cdot)\cdot\cdot)) \mapsto$ 

$((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4) \mapsto \cdot\cdot))\cdot) \mapsto$ 

$(((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4) \mapsto \cdot)\cdot)\cdot) \mapsto$ 

Satz 4.4.8 *Die Anzahl der überhalb der Winkelhalbierenden verlaufenden Wege in einem $(m+1) \times (n+1)$-Gitter mit $n \geq m$ ist*

$$\frac{n+1-m}{n+1}\binom{n+m}{m}.$$

Beweis. In Übung 4.6 zeigen wir, dass die Anzahl gleich

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1} = \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) \cdot \binom{n+m}{n}$$

ist, wobei die Gleichheit mit Corollar 4.2.8 folgt. ∎

Corollar 4.4.9 *Es gilt*

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 4.4.6 und Satz 4.4.8 mit $n = m$. ■

Beispiel 4.4.10 *In* MAPLE *können wir die Catalan-Zahlen* $c_0,\ldots,c_{10}$ *berechnen durch:*

```
seq(binomial(2*n,n)/(n+1),n=0..10);
1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,16796
```

Erhält man eine solche Folge c_n von Zahlen durch Experimente, kann man in der *Online Encyclopeadia of Integer Sequences* [12] überprüfen, welche kombinatorischen Interpretationen der Folge bekannt sind. Diese Datenbank enthält Beschreibungen von über 200000 Folgen von ganzen Zahlen. Insbesondere findet man dort noch viele weitere Interpretationen der Catalan-Zahlen.

4.5 Abzählen von Abbildungen

Viele wichtige Klassen von Objekten in der Informatik sind im mathematischen Sinne Abbildungen. Das wichtigste Beispiel ist eine **Liste** $L = (L_1, \ldots, L_n) \in M^n$ der Länge n mit Einträgen $L_i \in M$, die wir auch als Abbildung

$$\begin{aligned} \{1, \ldots, n\} &\to M \\ i &\mapsto L_i \end{aligned}$$

auffassen können (in manchen Programmiersprachen beginnt die Indizierung der Liste auch mit 0, d.h. wir betrachten Abbildungen $\{0, \ldots, n-1\} \to M$). Eine **Matrix**, oder in der Informatik ein **Array**, ist eine Abbildung

$$\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to M.$$

Die Einträge werden also durch zwei Zahlen indiziert.

Beispiel 4.5.1 *Sei* $M = \{a, \ldots, z\}$. *Die Liste*

$$(a, h, a)$$

entspricht der Abbildung

$$\begin{aligned}\{1,2,3\} &\to M\\ 1 &\mapsto a\\ 2 &\mapsto h\\ 3 &\mapsto a\end{aligned}$$

Das Array

$$\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$$

wird durch die Abbildung

$$\begin{aligned}\{1,2\}\times\{1,2,3\} &\to M\\ (1,1) &\mapsto a\\ (1,2) &\mapsto b\\ (1,3) &\mapsto c\\ (2,1) &\mapsto d\\ (2,2) &\mapsto e\\ (2,3) &\mapsto f\end{aligned}$$

dargestellt.

Die Frage nach der Anzahl solcher Listen oder Arrays übersetzt sich also in die Frage nach der Anzahl der entsprechenden Abbildungen. Diese Frage können wir allgemein beantworten:

Satz 4.5.2 *Sind N und M endliche Mengen mit $|N| = n$ und $|M| = m$, dann gibt es*

$$m^n$$

Abbildungen $N \to M$.

Beweis. Sei $f : N \to M$ eine Abbildung und schreibe $N = \{x_1, ..., x_n\}$. Für jedes $f(x_i)$ gibt es m Möglichkeiten, insgesamt also

$$\overbrace{m \cdot ... \cdot m}^{n} = m^n$$

Abbildungen f. ■

Definition 4.5.3 *Wir schreiben kurz M^N für die Menge aller Abbildungen $f : N \to M$.*

Beispiel 4.5.4 *Sei $N = \{1,2,3\}$ und $M = \{a,b\}$ dann sind alle Abbildungen $f : N \to M$, notiert als Listen $(f(1), f(2), f(3))$, gegeben durch*

(a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (b,a,a), (a,b,b), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b).

4.6 Anwendung: Worte

In Abschnitt 4.4 haben wir schon von endlichen Sequenzen aus Symbolen $\cdot$ und) gesprochen. Was ist das eigentlich im mathematischen Sinne?

Definition 4.6.1 *Sei A eine endliche Menge. Ein **Wort** mit n Buchstaben über dem **Alphabet** A ist ein Element von A^n. Wir schreiben für $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ auch kurz*

$$a_1...a_n$$

Im Sinne der Informatik ist ein Wort also einfach eine endliche Liste.

Beispiel 4.6.2 *Über dem Alphabet $A = \{a, ..., z\}$ schreiben wir*

$$hallo = (h,a,l,l,o) \in A^5.$$

Beispiel 4.6.3 *Eine 8-bit Zahl ist ein Wort in $\{0,1\}^8$.*

Chinesische Worte sind oft in $\{1, ..., 3000\}^2$, d.h. sie haben oft 2 Buchstaben allerdings in einem Alphabet von etwa 3000 Zeichen.

Bemerkung 4.6.4 *Ein Wort $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ können wir auch als die Abbildung*

$$\begin{aligned} \{1, ..., n\} &\to A \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

auffassen.

*Damit ist auch klar, was das **leere Wort** sein soll. Es ist die (eindeutige) Abbildung $\varnothing \to A$.*

Beispiel 4.6.5 *Das Wort aha enspricht der Abbildung*

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &\to \{a,...,z\} \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto h \\ 3 &\mapsto a \end{aligned}$$

Da Worte der Länge n in dem Alphabet A dasselbe wie Abbildungen $\{1,...,n\} \to A$ sind, gilt mit Satz 4.5.2:

Satz 4.6.6 *Die Anzahl der Worte der Länge n in einem Alphabet A mit $|A| = m$ Elementen ist*

$$m^n$$

Wir beschreiben noch jeweils eine zentrale Anwendung von Worten in der Informatik und der Mathematik:

Bemerkung 4.6.7 *In der Informatik spielen Worte eine wichtige Rolle in der Berechenbarkeitstheorie. Ein* ***Automat*** *nimmt als Eingabe ein Wort $(a_1,...,a_n) \in A^n$ und liest die Buchstaben von links nach rechts. Ausgehend von seinem* ***Ausgangszustand*** *wechselt er in jedem Schritt i abhängig von a_i und seinem aktuellen* ***Zustand*** *in einen neuen Zustand. Am Ende prüft er, ob sein* ***Endzustand*** *in einer gegebenen Menge von zulässigen Endzuständen ist.*

Zum Beispiel können wir einen Parkautomaten betrachten. Sein Anfangszustand ist 0 €, zulässig sei nur der Endzustand der exakten Parkgebühr 3 €. Wir werfen 2 Münzen ein, 1 € oder 2 €. Zulässig sind dann

Wort	*Zustandsfolge*
(1 €, 2 €)	0 €, 1 €, 3 €
(2 €, 1 €)	0 €, 2 €, 3 €

unzulässig dagegen

Wort	*Zustandsfolge*
(1 €, 1 €)	0 €, 1 €, 2 €
(2 €, 2 €)	0 €, 2 €, 4 €

Von den $2^2 = 4$ möglichen Worten sind also 2 zulässig und 2 nicht.

Wir skizzieren noch kurz eine wichtige Anwendung von Worten in der Mathematik:

Bemerkung 4.6.8 *Sind $w = a_1...a_n$ und $v = b_1...b_m$ Worte, dann definiert man die Verknüpfung "Hintereinanderschreiben" durch*

$$w \circ v = a_1...a_n b_1...b_m$$

Die Menge W aller Worte (beliebiger Länge) in dem Alphabet A ist zusammen mit $\circ$ ein Monoid. Die Assoziativität ist klar und das neutrale Element ist das leere Wort.

Fügen wir zu dem Alphabet zusätzliche Buchstaben a^{-1} für $a \in A$ mit der Rechenregel

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

*hinzu, dann erhalten wir die **freie Gruppe** F erzeugt von A.*

Bemerkung 4.6.9 *Sei*

$$A = \{g_1, ..., g_n\}$$

eine endliche Menge und F die freie Gruppe erzeugt von A (mit neutralem Element e). Seien $r_1, ..., r_s$ Elemente von F und N der kleinste Normalteiler von F, der $r_1, ..., r_s$ enthält. Dann heißt

$$\langle g_1, ..., g_n \mid r_1 = e, ..., r_s = e \rangle := F/N$$

*die Gruppe mit **Erzeugern** g_i **und Relationen** r_i.*

Beispiel 4.6.10 *Durch*

$$\begin{aligned} \left\langle g \mid g^5 = e \right\rangle &\to \mathbb{Z}/5 \\ g &\mapsto \bar{1} \end{aligned}$$

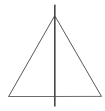
ist ein Gruppenisomorphismus gegeben: Sei F die freie Gruppe erzeugt von g. Der Kern von

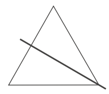
$$\begin{aligned} F &\to \mathbb{Z}/5 \\ g &\mapsto \bar{1} \end{aligned}$$

ist offenbar die Untergruppe $\langle g^5 \rangle$ erzeugt von g^5. Somit folgt die Behauptung aus dem Homomorphiesatz.

Beispiel 4.6.11 *Sei* $\mathrm{Sym}(D)$ *die Symmetriegruppe des Dreiecks (siehe Satz 3.2.4). Wie im vorangegangenen Beispiel kann man zeigen, dass*

$$\left\langle g_1, g_2 \mid g_1^2 = e,\ g_2^2 = e,\ (g_1 g_2)^3 = e \right\rangle \to \mathrm{Sym}(D)$$

$g_1 \mapsto$ 

$g_2 \mapsto$ 

einen Gruppenisomorphismus definiert.

4.7 Abzählen von injektiven Abbildungen

In Abschnitt 4.5 haben wir schon die Menge aller Abbildungen $N \to M$ zwischen zwei endlichen Mengen abgezählt. Wieviele der Abbildungen sind injektiv, d.h. auf wieviele Weisen kann man N als Teilmenge von M auffassen?

Satz 4.7.1 *Sind* N *und* M *endliche Mengen mit* $|N| = n$ *und* $|M| = m$, *dann gibt es*

$$\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$$

injektive Abbildungen $N \to M$.

Beweis. Sei $f : N \to M$ eine injektive Abbildung und schreibe $N = \{x_1, ..., x_n\}$. Für $f(x_1)$ gibt es m Möglichkeiten, für $f(x_2)$ noch $m-1$, induktiv für $f(x_i)$ noch $m-i+1$ Möglichkeiten, falls $n \leq m$.

Für $n > m$ gibt es nach Satz 2.3.6 keine injektive Abbildung $N \to M$. Andererseits ist auch das Produkt gleich 0, denn der Faktor für $i = m+1$ verschwindet. ■

Beispiel 4.7.2 *Sei* $N = \{1, 2\}$ *und* $M = \{a, b, c\}$. *Dann sind die injektiven Abbildungen* $f : N \to M$ *geschrieben als* $(f(1), f(2))$

$$(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b).$$

Im Satz erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{2}(3-i+1) = 3\cdot 2 = 6.$$

Für $N = \{1,2,3\}$ und $M = \{a,b\}$ gibt es keine injektive Abbildung $f : N \to M$ und im Satz erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{3}(2-i+1) = 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Nach Corollar 2.3.9 kann es eine bijektive Abbildung zwischen den endlichen Mengen N und M nur geben, wenn $|N| = |M|$. In diesem Fall ist nach Aufgabe 2.5 injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent. Somit folgt wegen

$$\prod_{i=1}^{n}(n-i+1) = n\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$

aus Satz 4.7.1:

Corollar 4.7.3 *Sind N und M endliche Mengen mit $|N| = |M| = n$, dann gibt es*

$$n!$$

bijektive Abbildungen $N \to M$.

Bemerkung 4.7.4 *Bijektive Abbildungen $M \to M$ bezeichnet man auch als* ***Permutationen****. Die Menge der bijektiven Abbildungen*

$$S(M) = \{f : M \to M \text{ bijektiv}\}$$

bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, denn die Komposition ist assoziativ (siehe Aufgabe 2.10) und die Komposition von zwei bijektiven Abbildungen ist wieder bijektiv (siehe Aufgabe 2.12).

Speziell für $M = \{1,\ldots,n\}$ heißt

$$S_n = S(\{1,\ldots,n\})$$

die ***symmetrische Gruppe*** *S_n. Elemente $f \in S_n$ schreibt man kurz als*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ f(1) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

Fassen wir f als Liste auf, ist die erste Zeile dabei eigentlich überflüssig, wird aber traditionell der Übersichtlichkeit halber geschrieben. Dies ist besonders nützlich bei der Verknüpfung von Permutationen:

Beispiel 4.7.5 *In der S_3 gilt*

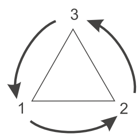
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

denn

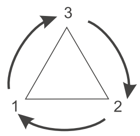
$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 3 \mapsto 3 \\ 3 &\mapsto 2 \mapsto 1 \end{aligned}$$

Beispiel 4.7.6 *Die Symmetriegruppe des Dreiecks in Satz 3.2.4 ist die S_3, da die Lage des Dreiecks durch die Lage der Eckpunkte festgelegt ist. Als Permutationen der Ecken aufgefasst sind die Elemente*

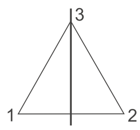
id $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



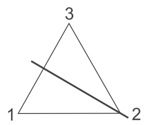
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



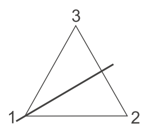
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Analog dazu lässt sich jede Symmetrie des Quadrats durch Nummerieren der Ecken als Element der S_4 auffassen (siehe Abbildung 4.6). Jedoch ist nicht jedes Element der S_4 eine Symmetrie des Quadrats (siehe Aufgabe 4.9).

4.8 Abzählen von surjektiven Abbildungen

Schließlich zählen wir noch die surjektiven Abbildungen ab. Als Anwendung werden wir im nächsten Abschnitt herleiten, wieviele Partitionen bzw. Äquivalenzrelationen es auf einer endlichen Menge gibt.

Satz 4.8.1 *Sind N und M endliche Mengen mit $|N| = n$ und $|M| = m$, dann gibt es*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

surjektive Abbildungen $N \to M$.

Beweis. Ohne Einschränkung ist $M = \{1, ..., m\}$. Für $i \in M$ sei

$$A_i = \{f : N \to M \mid i \notin f(N)\}$$

die Menge der Abbildungen, die i nicht treffen. Die Menge der nicht surjektiven Abbildungen ist also $A_1 \cup ... \cup A_m$. Mit der Siebformel (Satz 4.3.1) erhalten wir also

$$|A_1 \cup ... \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{|T|=k} |A_T|$$

wobei für $T \subset \{1, ..., m\}$

$$A_T = \bigcap_{i \in T} A_i$$

die Menge der Abbildungen ist, die T nicht treffen. Für festes k gibt es $\binom{m}{k}$ Wahlen für T. Für jedes solche T gilt

$$|A_T| = (m-k)^n,$$

denn für jedes $f(x)$, $x \in N$ gibt es $m-k$ Möglichkeiten in $M \backslash T$.

Die Zahl der surjektiven Abbildungen ist dann die Anzahl aller Abbildungen minus die Anzahl der nicht surjektiven, also

$$\begin{aligned} m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n \\ = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n \end{aligned}$$

■

Beispiel 4.8.2 *Für $N = \{1,2,3\}$ und $M = \{a,b\}$ sind die surjektiven Abbildungen $f: N \to M$, geschrieben als $(f(1), f(2), f(3))$,*

$$(a,a,b),\ (a,b,a),\ (b,a,a),\ (a,b,b),\ (b,a,b),\ (b,b,a).$$

Dagegen sind (a,a,a) und (b,b,b) nicht surjektiv.

In dem Satz erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \binom{2}{k} (2-k)^3 \\ &= 2^3 - \binom{2}{1} 1^3 + 0 = 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

Dabei ist der $k = 0$ Term die Anzahl aller Abbildungen und der $k = 1$ Term die Anzahl der Abbildungen, die genau ein Element von M nicht treffen.

Siehe auch Übungsaufgabe 4.10.

4.9 Anwendung: Partitionen von Mengen und Äquivalenzrelationen

Um die Äquivalenzrelationen auf einer endlichen Menge N abzuzählen, setzen wir diese zunächst mit den Partitionen von N in Beziehung:

Definition 4.9.1 *Eine **Partition** einer Menge N ist eine Menge $P = \{P_1, ..., P_m\}$ von Teilmengen $\varnothing \neq P_i \subset N$ sodass*

1) die P_i paarweise disjunkt sind, d.h. $P_i \cap P_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$, und

2) $N = P_1 \cup \ldots \cup P_m$

Es ist auch gebräuchlich P durch den Ausdruck

$$N = P_1 \cup \ldots \cup P_m$$

darzustellen.

Beispiel 4.9.2 *Für $N = \{1,2,3\}$ sind die Partitionen*

$$\begin{array}{l} \{\{1,2,3\}\} \\ \{\{1,2\},\{3\}\} \\ \{\{1,3\},\{2\}\} \\ \{\{2,3\},\{1\}\} \\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\} \end{array}$$

d.h.

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ N = \{1,2\} \cup \{3\} \\ N = \{1,3\} \cup \{2\} \\ N = \{2,3\} \cup \{1\} \\ N = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \end{array}$$

Beispiel 4.9.3 *Die leere Menge $N = \varnothing$ hat als Teilmenge nur $\varnothing$ also keine nichtleere Teilmenge. Somit ist $P = \varnothing$ die einzige Partition von N: Da P keine Elemente enthält, sind trivialerweise alle Elemente $\neq \varnothing$ und paarweise disjunkt. Weiter gibt die leere Vereinigung $\varnothing = N$.*

Satz 4.9.4 *Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Äquivalenzrelationen auf N und der Menge der Partitionen von N.*

Beweis. Jede Äquivalenzrelation auf der Menge N gibt eine Partition von N in die (nach Satz 2.5.4 disjunkten) Äquivalenzklassen. Ist umgekehrt $P = \{P_1, ..., P_n\}$ eine Partition von N, dann ist durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists i \text{ mit } \{x,y\} \subset P_i$$

eine eindeutige Äquivalenzrelation gegeben: Sie ist reflexiv, da jedes x in einem P_i liegt, die Symmetrie ist klar aus der Definition. Zur Transitivität: Ist $\{x, y\} \subset P_i$ und $\{y, z\} \subset P_j$, dann muss $i = j$ sein (da die P_i paarweise disjunkt sind und $y \in P_i \cap P_j$). Somit erhalten wir $\{x, z\} \subset \{x, y, z\} \subset P_i$. ■

Beispiel 4.9.5 *Die Partition*

$$\{\{1,2\},\{3\}\}$$

entspricht der Äquivalenzrelation auf $M = \{1,2,3\}$ *definiert durch*

$$\begin{array}{llll} 1 \sim 1 & 2 \sim 2 & 1 \sim 2 & 2 \sim 1 \\ 3 \sim 3 & & & \end{array}$$

oder als Relation $R \subset M \times M$ *geschrieben*

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}.$$

Definition 4.9.6 *Für* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *sei die* ***Stirlingzahl*** *(zweiter Art)* $S(n,m)$ *die Anzahl der Partitionen einer* n*-elementigen Menge in* m *nichtleere Teilmengen. Man schreibt auch* $S(N,m)$ *für die Menge der Partitionen von* N *in* m *Teilmengen.*

Die Anzahl aller Partitionen einer n*-elementigen Menge ist die* ***Bellsche Zahl***

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)$$

Beispiel 4.9.7 *Gemäß Beispiel 4.9.2 ist*

$$\begin{aligned} S(3,0) &= 0 \\ S(3,1) &= 1 \\ S(3,2) &= 3 \\ S(3,3) &= 1 \end{aligned}$$

und

$$B_3 = 0 + 1 + 3 + 1 = 5$$

Aus Satz 4.9.4 folgt sofort:

Corollar 4.9.8 *Die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf einer* n*-elementigen Menge ist* B_n*.*

Wie bestimmt man also die Stirlingzahlen $S(n,m)$? Zunächst handeln wir einige Randfälle ab:

Satz 4.9.9 *Es gilt*

1) $S(0,0) = 1$,
2) $S(0,m) = 0$ *für* $m > 0$,
3) $S(n,0) = 0$ *für* $n > 0$.

Beweis. Es gilt:

1) Die leere Menge hat genau 1 Partition (siehe Beispiel 4.9.3).
2) Die einzige Partition der leeren Menge hat 0 Elemente (siehe Beispiel 4.9.3).
3) Es gibt keine Möglichkeit eine nichtleere Menge in 0 Teilmengen zu partitionieren.

■

Ausgehend davon können wir alle verbleibenden Stirlingzahlen rekursiv berechnen:

Satz 4.9.10 *Für alle* $n < m$ *gilt*

$$S(n,m) = 0$$

und für alle $n \geq m$ *gilt*

$$S(n+1,m+1) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k,m)$$

Beweis. Sie erste Aussage ist klar: Eine n-elementige Menge kann nicht in $m > n$ Teile partitioniert werden.

Zum Beweis der zweiten Aussage zählen wir die Partitionen von $N = \{1,...,n+1\}$ in $m+1$ Teilmengen ab. Dazu zählen wir für jedes $0 \leq k \leq n$ die Partitionen, in denen genau k der Elemente von N nicht in derselben Teilmenge wie $n+1$ liegen. Eine solche Partition $P = \{P_1,...,P_{m+1}\}$ können wir wie folgt konstruieren:

1) Wähle eine k-elementige Teilmenge $M \subset \{1, ..., n\}$. Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

2) Setze $P_{m+1} = N \backslash M$. Dann ist $n + 1 \in P_{m+1}$.

3) Partitioniere M in m Teilmengen

$$M = P_1 \cup ... \cup P_m.$$

Dafür gibt es $S(k, m)$ Möglichkeiten.

Jede dieser Wahlen liefert eine andere Partition

$$N = P_1 \cup ... \cup P_m \cup P_{m+1}$$

von N und wir erhalten alle Partitionen auf diese Weise. Für festes k gibt es also

$$\binom{n}{k} \cdot S(k, m)$$

Partitionen. Die Summe über alle k ist die Gesamtzahl aller Partitionen. Summanden mit $k < m$ tragen nicht bei, da dann $S(k, m) = 0$. ■

Beispiel 4.9.11 *Wir illustrieren den Beweis an einem Beispiel. Sei z.B. $n + 1 = 4$ und $m + 1 = 3$, betrachte also Partitionen von $N = \{1, 2, 3, 4\}$ in 3 Teilmengen. Der Beweis sortiert die Partitionen nach der Zahl k der Elemente von N, die nicht in derselben Menge wie 4 liegen. Für M und damit P_3 haben wir folgende Möglichkeiten:*

k	2			3
M	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$
P_3	$\{1,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$

Hier ist $k = 4$ nicht möglich, da dann P_3 keine Elemente mehr hätte, und $k < 2$ nicht, da sich dann M nicht in $m = 2$ Mengen partitionieren lässt. Im Fall $k = 2$ existieren $\binom{3}{2} = 3$ Wahlen für M, im Fall $k = 3$ gibt es nur $\binom{3}{3} = 1$ Möglichkeit.

Im Fall $k = 2$ existieren $S(2, 2) = 1$ Partitionen von M in 2 Teilmengen, für $k = 3$ gibt es $S(3, 2) = 3$ solche Partitionen:

k	2			3		
P_1, P_2	$\{2\},\{3\}$	$\{1\},\{3\}$	$\{1\},\{2\}$	$\{1,2\},\{3\}$	$\{1,3\},\{2\}$	$\{2,3\},\{1\}$
P_3	$\{1,4\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$		$\{4\}$	

Insgesamt erhalten wir also die folgenden $S(4,3) = 6$ *Partitionen*

k	2	3
P	$\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\}$	$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$
	$\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$	$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$
	$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$	$\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$

Beispiel 4.9.12 *Mit Satz 4.9.10 können wir durch rekursives Anwenden der Formel beliebige Stirlingzahlen berechnen, z.B. erhalten wir (entsprechend dem vorherigen Beispiel)*

$$\begin{aligned}
S(4,3) &= \binom{3}{2} \cdot S(2,2) + \binom{3}{3} \cdot S(3,2) \\
&= 3 \cdot S(2,2) + 1 \cdot S(3,2) \\
S(3,2) &= \binom{2}{1} \cdot S(1,1) + \binom{2}{2} \cdot S(2,1) \\
&= 2 \cdot S(1,1) + 1 \cdot S(2,1) \\
S(2,1) &= \binom{1}{0} \cdot S(0,0) + \binom{1}{1} \cdot S(1,0) \\
&= 1 \cdot S(0,0) + 1 \cdot S(1,0)
\end{aligned}$$

ebenso $S(2,2) = S(1,1) = S(0,0) = 1$ *(was aber auch direkt aus der Definition klar ist). Somit ist (mit Satz 4.9.9)*

$$\begin{aligned}
S(2,1) &= 1 + 0 = 1 \\
S(3,2) &= 2 + 1 = 3 \\
S(4,3) &= 3 + 3 = 6
\end{aligned}$$

In dem MAPLE-*Paket* `combinat` *ist die Berechnung der Stirlingzahlen implementiert in der Funktion* `stirling2`*:*

```
with(combinat);
stirling2(0,0);
1
stirling2(4,3);
6
```

Aus Satz 4.9.10 erhalten wir auch eine Rekursionsformel für die Bellschen Zahlen (zum Beweis siehe Übung 4.13):

Corollar 4.9.13 *Für die Bellschen Zahlen B_n gilt $B_0 = 1$ und*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

für alle $n \geq 0$.

Beispiel 4.9.14 *Es gilt*

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_0 = 1 \\
B_2 &= B_0 + B_1 = 2 \\
B_3 &= B_0 + 2B_1 + B_2 = 5
\end{aligned}$$

In Maple *können wir die Bellschen Zahlen folgendermaßen berechnen:*

```
with(combinat);
seq(bell(j),j=0..10);
1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975
```

Im Folgenden wollen wir noch effizientere Methoden zur Berechnung der Stirlingzahlen entwickeln. Zunächst eine Rekursionsgleichung mit nur 2 Summanden (für den Beweis siehe Übung 4.11):

Satz 4.9.15 *Für die Stirlingzahlen gilt*

$$S(n+1, m+1) = S(n, m) + (m+1) \cdot S(n, m+1)$$

für alle $n, m \geq 0$.

Beispiel 4.9.16 *Wir berechnen damit die Stirlingzahlen*

$$\begin{aligned}
S(3,0) &= 0 \\
S(3,1) &= S(2,1) = S(1,1) = 1 \\
S(3,2) &= S(2,1) + 2 \cdot S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\
S(3,3) &= S(2,2) = S(1,1) = 1
\end{aligned}$$

entsprechend den Partitionen in Beispiel 4.9.2.

Bemerkung 4.9.17 *Ausgehend von der Formel*

$$S(3,2) = S(2,1) + 2 \cdot S(2,2)$$

erhalten wir folgenden Algorithmus zum Aufzählen aller Partitionen von $\{1,2,3\}$ *in* 2 *Teilmengen:*

- *Bestimme alle Partitionen von* $\{1,2\}$ *in* 1 *Menge*

  $$\{\{1,2\}\}$$

  und füge $\{3\}$ *hinzu:*

  $$\{\{1,2\},\{3\}\}$$

- *Bestimme alle Partitionen von* $\{1,2\}$ *in* 2 *Mengen*

  $$\{\{1\},\{2\}\}$$

  und füge 3 *auf alle möglichen Weisen zu einem der Partitionselemente hinzu:*

  $$\begin{gathered}\{\{1,3\},\{2\}\}\\ \{\{1\},\{2,3\}\}\end{gathered}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{gathered}\{\{1,2\},\{3\}\}\\ \{\{1,3\},\{2\}\}\\ \{\{1\},\{2,3\}\}\end{gathered}$$

In Verallgemeinerung davon liefert der kombinatorische Beweis der Rekursionsgleichung in Satz 4.9.15 einen rekursiven Algorithmus zur Bestimmung aller Partitionen einer endlichen Menge N *in* m *Teilmengen. Die Rekursion endet in einem der Fälle von Satz 4.9.9. Zur Implementierung siehe Aufgabe 4.12.*

Abschließend beweisen wir noch eine geschlossene Formel für die Stirlingzahlen, indem wir Partitionen mit surjektiven Abbildungen in Beziehung setzen. Dazu leiten wir zunächst eine Formel für die Anzahl der geordneten Partitionen her:

Nach unserer Definition gibt die Stirlingzahl $S(n,m)$ die Anzahl der Möglichkeiten an, n unterscheidbare Geschenke auf m Päckchen zu verteilen, wobei die Päckchen keiner individuellen Person zugeordnet sind. Wir können aber auch fragen, wieviele Möglichkeiten es gibt, n unterscheidbare Geschenke auf m Personen zu verteilen. Dazu müssen wir $\{P_1,...,P_m\}$ nicht als Menge sondern als Liste auffassen:

Definition 4.9.18 *Eine* ***geordnete Partition*** *einer Menge N ist eine Liste $P = (P_1,...,P_m)$ von Teilmengen $P_i \subset N$, sodass $\{P_1,...,P_m\}$ eine Partition von N ist.*

Beispiel 4.9.19 *Für $N = \{a,b,c\}$ und $m = 2$ gibt es 3 Partitionen*

$$\{\{a,b\},\{c\}\} \qquad \{\{a,c\},\{b\}\} \qquad \{\{b,c\},\{d\}\}$$

also Verteilungen der Geschenke a,b,c auf 2 Päckchen.

Dagegegen existieren 6 geordnete Partitionen

$$\begin{array}{ccc} (\{a,b\},\{c\}) & (\{a,c\},\{b\}) & (\{b,c\},\{d\}) \\ (\{c\},\{a,b\}) & (\{b\},\{a,c\}) & (\{d\},\{b,c\}) \end{array}$$

d.h. Verteilungen der Geschenke a,b,c auf 2 Personen.

Bemerkung 4.9.20 *Aus jeder Partition $\{P_1,...,P_m\}$ kann man genau $m!$ verschiedene geordnete Partitionen bilden, nämlich*

$$(P_{f(1)},...,P_{f(m)})$$

mit $f \in S_m$.

Satz 4.9.21 *Es gibt*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$$

geordnete Partitionen $(P_1,...,P_m)$ einer n-elementigen Menge in m nichtleere Teilmengen.

Beweis. Sei $|N| = n$. Jede surjektive Abbildung $f : N \to \{1, ..., m\}$ definiert eine geordnete Partition $(P_1, ..., P_m)$ von N in die Mengen

$$P_i = f^{-1}(\{i\}).$$

Die P_i sind disjunkt: Wäre $a \in P_i \cap P_j$ für $i \neq j$, dann $f(a) = i$ und $f(a) = j$, was der Abbildungseigenschaft widerspricht.

Umgekehrt definiert jede geordnete Partition $(P_1, ..., P_m)$ eine surjektive Abbildung $f : N \to \{1, ..., m\}$ durch $f(x) = i$ für $x \in P_i$.

Weiter sind diese Zuweisungen zueinander invers, d.h. geben eine Bijektion zwischen der Menge der surjektiven Abbildungen und der Menge der geordneten Partitionen.

Nach Satz 4.8.1 ist die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \to \{1, ..., m\}$ gleich

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

■

Mit Bemerkung 4.9.20 erhalten wir als Corollar zu Satz 4.9.21 die gesuchte geschlossene Formel für die Stirlingzahlen:

Corollar 4.9.22 *Es gilt*

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 4.9.23 *Wir illustrieren den Beweis von Satz 4.9.21 an einem Beispiel: Die Partition*

$$\{\{a,b\},\{c\}\}$$

von $M = \{a,b,c\}$ *in* $n = 2$ *Teilmengen entspricht den geordneten Partitionen*

$$(\{a,b\},\{c\}) \qquad (\{c\},\{a,b\})$$

und diese den surjektiven Abbildungen

$$\begin{aligned} \{a,b,c\} &\to \{1,2\} \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 1 \\ c &\mapsto 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \{a,b,c\} &\to \{1,2\} \\ a &\mapsto 2 \\ b &\mapsto 2 \\ c &\mapsto 1 \end{aligned}$$

4.10 Partitionen von Zahlen

Im letzten Abschnitt haben wir Partitionen und geordnete Partitionen einer n-elementigen Menge N abgezählt. Nach der Mengendefinition 2.1.1 sind die Elemente von N unterscheidbar. Beispielsweise könnte N eine Menge von verschiedenen Geschenken sein, die wir auf Päckchen oder Leute verteilen wollen. Oft hat man aber auch keine Idee, welche Geschenke man kaufen soll und verschenkt Geld. Wieviele Möglichkeiten gibt es also, n Euromünzen auf m Päckchen oder Leute zu verteilen? Bei diesem kombinatorischen Problem macht es keinen Sinn die einzelnen Euromünzen zu unterscheiden. Mathematisch übersetzt sich die Frage (im Päckchenfall) wie folgt:

Definition 4.10.1 *Eine **(Zahl)partition** von $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Darstellung von n als Summe positiver ganzer Zahlen. Dabei sehen wir zwei Gleichungen*

$$n = p_1 + \ldots + p_m$$

als äquivalent an, wenn sie durch das Kommutativgesetz auseinander hervorgehen.

Wir bezeichnen mit $P(n,m)$ die Anzahl aller Partitionen von n in m Zahlen. Die Anzahl aller Partitionen von n ist

$$P(n) = \sum_{m=0}^{n} P(n,m).$$

Beispiel 4.10.2 *Die Gleichungen*

$$4 = 1 + 3$$

und

$$4 = 3 + 1$$

repräsentieren dieselbe Partition von 4.

Beispiel 4.10.3 *Die Partitionen von* $n = 4$ *sind*

m	*Partitionen*
1	$4 = 4$
2	$4 = 2 + 2$
	$4 = 3 + 1$
3	$4 = 2 + 1 + 1$
4	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$

Somit ist

m	0	1	2	3	4
$P(4,m)$	0	1	2	1	1

also

$$P(4) = 5.$$

Bemerkung 4.10.4 *Analog zum Mengenfall gilt*

$$P(0,0) = 1,$$

denn die leere Summe gibt 0*. Ebenso ist*

$$P(n,0) = 0 \text{ für } n > 0$$
$$P(0,m) = 0 \text{ für } m > 0.$$

Eine Berechnung von $P(n,m)$ aus $S(n,m)$ ist nicht ohne Weiteres möglich. Wir wissen nur, dass stets

$$S(n,m) \geq P(n,m),$$

denn jede Mengenpartition

$$N = P_1 \cup \ldots \cup P_m$$

gibt eine Zahlpartition

$$|N| = |P_1| + \ldots + |P_m|.$$

Allerdings können wir wie im Mengenfall eine Rekursionsgleichung für die $P(n,m)$ angeben. Dazu bemerken wir zunächst:

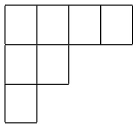
Bemerkung 4.10.5 *In einer Zahlpartition $n = p_1 + ... + p_m$ kann man annehmen, dass die p_i absteigend sortiert sind. Somit entspricht eine Zahlpartition einer Liste $(p_1, ..., p_n)$ mit*

$$n = p_1 + ... + p_m$$

und

$$n \geq p_1 \geq ... \geq p_m > 0.$$

*Diese Liste können wir als **Young-Diagramm** der Form*

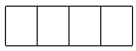


schreiben, wobei in der i-ten Zeile linksbündig p_i Kästchen stehen.

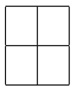
Es ist also $P(n,m)$ die Zahl der Young-Diagramme mit n Kästchen und m Zeilen.

Beispiel 4.10.6 *Die Partitionen von 4 als Young-Diagramm sind*

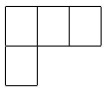
$4 = 4$



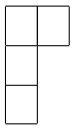
$4 = 2 + 2$



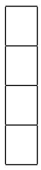
$4 = 3 + 1$



$4 = 2 + 1 + 1$



$4 = 1 + 1 + 1 + 1$



Satz 4.10.7 *Für $n < m$ ist*

$$P(n,m) = 0$$

und für alle $n \geq m \geq 0$ gilt

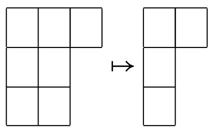
$$P(n+1, m+1) = P(n-m, m+1) + P(n,m).$$

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Sei $Y(n,m)$ die Menge der Young-Diagramme mit n Kästchen und m Zeilen. Wir konstruieren eine bijektive Abbildung

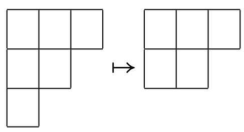
$$\begin{array}{cccc} f: & Y(n+1,m+1) & \to & Y(n-m,m+1) \cup Y(n,m) \\ & P & \mapsto & f(P) \end{array}$$

durch folgende Abbildungsvorschrift: Sei P ein beliebiges Young-Diagramm mit p_i Kästchen in Zeile i. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) Sind alle $p_i \geq 2$, so erhalten wir durch Streichen der ersten Spalte in P ein Young-Diagramm $f(P) \in Y(n-m,m+1)$, d.h. mit $m+1$ Zeilen und $n-m$ Kästchen (aus dem sich das urspüngliche Diagramm durch Hinzufügen der Spalte wieder rekonstruieren lässt):



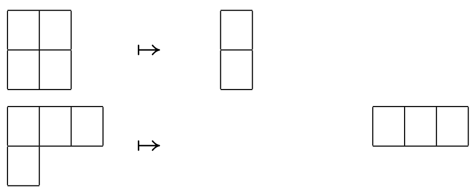
2) Ist $p_{m+1} = 1$, so erhalten wir durch Streichen der letzten Zeile in P ein Young-Diagramm $f(P) \in Y(n,m)$, d.h. mit m Zeilen und n Kästchen (aus dem sich das urspüngliche Diagramm durch Hinzufügen des Kästchens wieder rekonstruieren lässt):



Da $P(n,m) = |Y(n,m)|$ folgt die Behauptung. ∎

Beispiel 4.10.8 *Mit dem Satz erhalten wir*

$$P(4,2) \quad = \quad P(2,2) \quad + \quad P(3,1)$$



mit der entsprechenden Korrespondenz von Young-Diagrammen. Ebenso bekommen wir

$$P(2,2) = P(3,1) = 1$$

(was aber auch direkt aus der Definition klar ist) und somit

$$P(4,2) = 1 + 1 = 2.$$

Bemerkung 4.10.9 *Der Beweis des Satzes gibt einen rekursiven Algorithmus zur Bestimmung aller Partitionen von n in m positive Summanden. Siehe dazu Aufgabe 4.17.*

Bemerkung 4.10.10 *Auf einer Gruppe G ist durch $g_1 \sim g_2$ wenn $\exists h \in G$ mit $g_1 h = h g_2$ eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Elemente g_1 und g_2 heißen dann* ***konjugiert****. Man kann zeigen, dass für $G = S_n$ die Äquivalenzklassen (****Konjugationsklassen****) in Bijektion mit den Partitionen von n stehen. Siehe dazu auch die Übungsaufgaben 4.19 und 4.20.*

Wie im Mengenfall bleibt noch die Frage nach der Anzahl der geordneten Partitionen von $n \in \mathbb{N}$. Für Zahlen ist die Antwort wesentlich einfacher. Allerdings besteht keine einfache Beziehung zu $P(n,m)$, denn Permutation der Summanden kann dieselbe geordnete Partition liefern (z.B. für $4 = 2 + 2$).

Definition 4.10.11 *Eine* ***geordnete (Zahl)partition*** *von $n \in \mathbb{N}_0$ ist eine Liste $P = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}^m$ sodass*

$$n = p_1 + ... + p_m.$$

Es ist also $p_i \geq 1$. In Übung 4.18 zeigen wir:

Satz 4.10.12 *Für $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es genau*

$$\binom{n-1}{m-1}$$

geordnete Partitionen von n in m Zahlen.

Daraus folgt mit Übung 4.1:

Corollar 4.10.13 *Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat genau 2^{n-1} geordnete Partitionen.*

Beispiel 4.10.14 *Für $n = 4$ haben wir*

Partitionen	*geordnete Partitionen*	m	$\binom{n-1}{m-1}$
$4 = 4$	(4)	1	1
$4 = 1 + 3$	$(1,3),\ (3,1)$	2	3
$4 = 2 + 2$	$(2,2)$		
$4 = 1 + 1 + 2$	$(1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1)$	3	3
$4 = 1 + 1 + 1 + 1$	$(1,1,1,1)$	4	1

es gibt also insgesamt

$$2^3 = 8$$

geordnete Partitionen von 4.

Was passiert, wenn wir auch $p_i = 0$ zulassen, d.h. wir verteilen n€ auf m Personen, wobei manche auch leer ausgehen dürfen?

Satz 4.10.15 *Für $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es genau*

$$\binom{n + m - 1}{m - 1}$$

Listen $(p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}_0^m$ mit

$$n = p_1 + ... + p_m.$$

Beweis. Jede Darstellung

$$n = p_1 + ... + p_m$$

mit $p_i \geq 0$ gibt eine Darstellung

$$n + m = (p_1 + 1) + ... + (p_m + 1)$$

und umgekehrt. Wir haben also eine bijektive Abbildung

$$\{\text{Partitionen von } n \text{ in } m \text{ mit } 0\} \to \{\text{Partitionen von } n + m \text{ in } m\}$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 4.10.12. ∎

Diese Listen nennen wir geordnete Zahlpartitionen von n in m mit 0.

Beispiel 4.10.16 *Wir illustrieren den Beweis für $n = 4$ und $m = 2$:*

Partitionen von n in m mit 0	*Partitionen von $n + m$ in m*
$4 = 4 + 0$	$6 = 5 + 1$
$4 = 3 + 1$	$6 = 4 + 2$
$4 = 2 + 2$	$6 = 3 + 3$
$4 = 1 + 3$	$6 = 2 + 4$
$4 = 0 + 4$	$6 = 1 + 5$

Es gibt also

$$\binom{4+2-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$$

Darstellungen von 4 als geordnete Summe von 2 nichtnegativen Zahlen.

4.11 Multimengen

In vielen Anwendungen wollen wir in einer Menge mehrfache Elemente zulassen. Beispielsweise würden wir die (ungeordnete) Zahlpartition

$$4 = 1 + 1 + 2$$

gerne als eine Menge auffassen, in der 1 zweimal und 2 einmal vorkommt. Der Mengenbegriff erlaubt allerdings keine mehrfachen Elemente, da alle Elemente einer Menge nach Definition unterscheidbar sind. Dies ist auch richtig so, denn wir können solche Multimengen problemlos mit dem herkömmlichen Mengenbegriff modellieren:

Definition 4.11.1 *Eine **Multimenge** $\mathcal{M}$ ist eine Abbildung $a : M \to \mathbb{N}_0$. Man sagt, dass $m \in M$ ein $a(m)$-faches Element von $\mathcal{M}$ ist.*

Für $|M| < \infty$ ist die Anzahl der Elemente von $\mathcal{M}$ definiert als

$$|\mathcal{M}| = \sum_{m \in M} a(m).$$

Notation 4.11.2 *Ist $M = \{m_1, ..., m_n\}$, dann schreiben wir*

$$\mathcal{M} = \{|\underbrace{m_1, ..., m_1}_{a(m_1)}, ..., \underbrace{m_n, ..., m_n}_{a(m_n)}|\}$$

Beispiel 4.11.3 *Die Multimenge* $\{x, y, z\} \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto 2$, $y \mapsto 1$, $z \mapsto 3$ *hat also die Kurzschreibweise*

$$\mathcal{M} = \{|x, x, y, z, z, z|\}.$$

Dabei können wir die Elemente beliebig sortieren, z.B. ist $\{x, y, z\} = \{y, x, z\}$, *also auch*

$$\mathcal{M} = \{|y, x, x, z, z, z|\}.$$

Jede Menge M *kann man auf natürliche Weise als Multimenge mit* $a(m) = 1$ *für alle* $m \in M$ *auffassen.*

Multimengen verhalten sich also genau wie gewöhnliche Mengen, nur dürfen Elemente auch mehrfach vorkommen.

Beispiel 4.11.4 *Multimengen treten bei der Primfaktorisierung von ganzen Zahlen auf. Beispielsweise können wir die Faktorisierung*

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

darstellen als die Multimenge

$$\{|2, 2, 3, 7|\}.$$

Beispiel 4.11.5 *Ebenso kann man natürlich auch für andere Ringe vorgehen, in denen es eine sinnvolle Primfaktorisierung gibt, z.B. für den Polynomring* $K[X]$*: Die Faktorisierung*

$$f = X^3 - 6X^2 + 9X = X \cdot (X - 3)^2$$

lässt sich darstellen als die Multimenge

$$\{|X,\ X - 3,\ X - 3|\}.$$

Entsprechend bilden auch die Nullstellen von f *keine Menge, sondern eine Multimenge*

$$\{|0,\ 3,\ 3|\}$$

denn 3 *ist ein* 2*-fache Nullstelle von* f.

Die Kombinatorik von Multimengen können wir mit Hilfe des Satzes über geordnete Zahlpartitionen mit 0 beschreiben:

Satz 4.11.6 *Für $|M| = m$ gibt es*

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

Multimengen mit n Elementen aus M.

Beweis. Jede Liste $(p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}_0^m$ mit $p_1 + ... + p_m = n$ entspricht einer Multimenge

$$\mathcal{M} = \{| \underbrace{x_1, ..., x_1}_{p_1}, ..., \underbrace{x_m, ..., x_m}_{p_m} |\}$$

mit $n = |\mathcal{M}|$ Elementen und umgekehrt. Somit folgt die Behauptung aus Satz 4.10.15. ■

Beispiel 4.11.7 *Wir illustrieren den Beweis für $n = 4$ und $M = \{x, y\}$:*

$n = p_1 + p_2$	$\mathcal{M}$
$4 = 4 + 0$	$\{\|x, x, x, x\|\}$
$4 = 3 + 1$	$\{\|x, x, x, y\|\}$
$4 = 2 + 2$	$\{\|x, x, y, y\|\}$
$4 = 1 + 3$	$\{\|x, y, y, y\|\}$
$4 = 0 + 4$	$\{\|y, y, y, y\|\}$

4.12 Systematik im kombinatorischen Zoo

Viele der bisher behandelten praktischen kombinatorischen Fragestellungen lassen sich in das Zählen von Abbildungen oder Äquivalenzklassen von Abbildungen übersetzen. Damit kann man (einem Teil des) umfangreichen Zoos von Abzählproblemen eine Systematik geben. Es gibt $16 = 4 \cdot 4$ naheliegende Möglichkeiten: Wir können beliebige, injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen $N \to M$ zwischen endlichen Mengen M und N zählen. Weiter können wir das Zählproblem bis auf Permutation von N oder/und von M betrachten. Im Wesentlichen haben wir schon alle diese Möglichkeiten kennengelernt (z.B. unterscheidbare oder ununterscheidbare Geschenke verteilt auf Päckchen oder Leute).

In Definition 4.5.3 wurde schon die Notation M^N für die Menge aller Abbildungen $f : N \to M$ einführt.

Definition 4.12.1 *Gegeben Mengen M und N, schreiben wir*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Inj}(M^N) &= \{f \in M^N \mid f \text{ injektiv}\}\\
\mathrm{Surj}(M^N) &= \{f \in M^N \mid f \text{ surjektiv}\}\\
\mathrm{Bij}(M^N) &= \{f \in M^N \mid f \text{ bijektiv}\}
\end{aligned}$$

für die Menge der injektiven, surjektiven bzw. bijektiven Abbildungen.

Als leichte Übung zeigt man:

Proposition 4.12.2 *Auf M^N sind durch*

$$\begin{aligned}
f \simeq g &\Leftrightarrow \exists \tau \in S(M) \text{ mit } \tau \circ f = g\\
f \eqsim g &\Leftrightarrow \exists \mu \in S(N) \text{ mit } f \circ \mu = g\\
f \approx g &\Leftrightarrow \exists \mu \in S(N) \text{ und } \tau \in S(M) \text{ mit } \tau \circ f \circ \mu = g
\end{aligned}$$

Äquivalenzrelationen gegeben.

Diese Äquivalenzrelationen kann man auf $\mathrm{Inj}(M^N)$, $\mathrm{Surj}(M^N)$ und $\mathrm{Bij}(M^N)$ einschränken.

Beispiel 4.12.3 *Nach Beispiel 4.8.2 gibt es folgende surjektive Abbildungen $f : N \to M$ von $N = \{1,2,3\}$ nach $M = \{a,b\}$, wobei wir wie bei Permutationen*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix}$$

es ist also

$$\left|\mathrm{Surj}(M^N)\right| = 6.$$

Die Abbildungen entsprechen den Möglichkeiten 3 Geschenke auf 2 Personen zu verteilen.

Beispiel 4.12.4 *Wir haben*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

denn es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und analog für die anderen Äquivalenzen. Somit gilt

$$\left|\mathrm{Surj}(M^N)/\approx\right| = 2.$$

Die beiden Äquivalenzklassen entsprechen den beiden geordneten Zahlpartitionen

$$3 = 3 + 1$$
$$3 = 1 + 2$$

d.h. wir verteilen 3 € auf zwei Personen (Person a bekommt 2 € und Person b bekommt 1 €, und umgekehrt).

Beispiel 4.12.5 *Wir haben* 3 *Äquivalenzklassen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix}$$

denn es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

und analog für die anderen Äquivalenzen. Somit gilt

$$\left|\operatorname{Surj}(M^N)/\simeq\right| = 3.$$

Die drei Äquivalenzklassen entsprechen den (ungeordneten) Mengenpartitionen

$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\}$$
$$\{1,2,3\} = \{1,3\} \cup \{2\}$$
$$\{1,2,3\} = \{2,3\} \cup \{1\},$$

d.h. wir verteilen 3 *Geschenke auf* 2 *Päckchen.*

Beispiel 4.12.6 *Modulo* $\approx$ *sind alle* 6 *Abbildungen äquivalent*

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & b \end{pmatrix} & \eqsim & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix} & \eqsim & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & a \end{pmatrix} \\ \simeq & & \simeq & & \simeq \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & b & a \end{pmatrix} & \eqsim & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix} & \eqsim & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & b \end{pmatrix} \end{array}$$

es ist also

$$\left|\operatorname{Surj}(M^N)/\approx\right| = 1.$$

Die einzige Äquivalenzklasse entspricht der (ungeordneten) Zahlpartition

$$3 = 2 + 1,$$

d.h. wir verteilen 3 € *auf zwei Päckchen.*

In Verallgemeinerung davon gilt:

Satz 4.12.7 *Seien N und M Mengen, $n = |N|$ und $m = |M|$. Die Mengen A von beliebigen, injektiven, surjektiven bzw. bijektiven Abbildungen $N \to M$ und deren Mengen von Äquivalenzklassen $A/\eqsim$, $A/\simeq$ und $A/\approx$ lassen sich wie folgt interpretieren:*

A	A	$A/\eqsim$	$A/\simeq$	$A/\approx$
M^N	*Worte oder ziehe n aus m mit Zurücklegen mit Reihenfolge*	*Multimengen oder geordnete Zahlpart. von n in m mit $p_i \geq 0$*	*Part. von N in maximal m Mengen*	*Zahlpart. von n in m mit $p_i \geq 0$*
$\mathrm{Inj}(M^N)$	*Ziehe n aus m ohne Zurücklegen mit Reihenfolge*	*Lotto, d.h. ziehe n aus m ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge*	*1 Element falls $n \leq m$ sonst $\varnothing$*	*1 Element falls $n \leq m$ sonst $\varnothing$*
$\mathrm{Surj}(M^N)$	*geordnete Part. von N in m*	*geordnete Zahlpart. von n in m mit $p_i \geq 1$*	*Part. von N in m*	*Zahlpart. von n in m mit $p_i \geq 1$*
$\mathrm{Bij}(M^N)$	*Permutationen falls $n = m$ sonst $\varnothing$*	*1 Element falls $n = m$ sonst $\varnothing$*	*1 Element falls $n = m$ sonst $\varnothing$*	*1 Element falls $n = m$ sonst $\varnothing$*

Damit gelten die folgenden Formeln für ihre Anzahl von Elementen:

A	$\lvert A\rvert$	$\lvert A/\eqsim\rvert$	$\lvert A/\simeq\rvert$	$\lvert A/\approx\rvert$
M^N	m^n	$\binom{n+m-1}{n}$	$\sum_{k=0}^{m} S(n,k)$	$P(n+m,m)$
$\mathrm{Inj}(M^N)$	$\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$	$\binom{m}{n}$	$\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } n \leq m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } n \leq m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$
$\mathrm{Surj}(M^N)$	$m! \cdot S(n,m)$	$\binom{n-1}{m-1}$	$S(n,m)$	$P(n,m)$
$\mathrm{Bij}(M^N)$	$\begin{array}{ll} m! & \textit{für } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$	$\begin{array}{ll} 1 & \textit{für } n = m \\ 0 & \textit{sonst} \end{array}$

Beweis. Ohne Einschränkung ist $N = \{1, ..., n\}$ und $M = \{1, ..., m\}$. Wir behandeln die 16 Fälle spaltenweise:

1) Ohne Äquivalenzrelation:

   (a) Abbildungen: Interpretation und Anzahl folgt aus Bemerkung 4.6.4 und Satz 4.6.6.

   (b) Injektive Abbildungen: Der Beweis von Satz 4.7.1 gibt die Interpretation und die Formel.

   (c) Surjektive Abbildungen: Satz 4.8.1 und Satz 4.9.21.

   (d) Bijektive Abbildungen: Corollar 4.7.3.

2) Modulo $\approx$ (Permutation von N):

   (a) Abbildungen: Durch eine Abbildung $f : N \to M$ erhalten wir eine disjunkte Vereinigung

   $$N = \bigcup_{m \in M} f^{-1}(\{m\})$$

   wobei $|f^{-1}(m)| \geq 0$. Durch Permutation von N können wir annehmen, dass

   $$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{1, 2, ..., p_1\} \\ f^{-1}(\{2\}) &= \{p_1 + 1, ..., p_2\} \\ &\vdots \\ f^{-1}(\{m\}) &= \{p_{m-1} + 1, p_{m-1} + 2, ..., p_m\} \end{aligned}$$

   Somit gibt die Klasse von f modulo $\approx$ eine eindeutige geordnete Summe

   $$n = p_1 + ... + p_m$$

   mit $p_i \geq 0$. Nach Satz 4.11.6 gibt es $\binom{n+m-1}{m-1}$ solche Tupel $(p_1, ..., p_m)$.

   (b) Injektive Abbildungen: Modulo $\approx$ ist jede injektive Abbildung durch ihr Bild festgelegt. Um dieses auszuwählen haben wir $\binom{m}{n}$ Möglichkeiten (Definition 4.2.1).

   (c) Surjektive Abbildungen: Wie $2(a)$, jedoch ist für surjektives f jedes $p_i \geq 1$. Somit erhalten wir eine geordnete Zahlpartition. Nach Satz 4.10.12 ist die Anzahl solcher Partitionen $\binom{n-1}{m-1}$.

(d) Bijektive Abbildungen: Durch Permutation von N können wir erreichen, dass $f(i) = i \ \forall i$. Alle Abbildungen f liegen also in derselben Äquivalenzklasse.

3) Modulo $\simeq$ (Permutation von M):

(a) Abbildungen: Jedes $f : N \to M$ liefert eine (ungeordnete) Partition

$$N = \bigcup_{m \in f(N)} f^{-1}(\{m\})$$

in $k := |f(N)|$ Teilmengen, wobei f und g dieselbe Partition liefern genau dann wenn $f \simeq g$. Die Elemente von $M^N / \simeq$ entsprechen also genau den Partitionen von N in k Teilmengen für $k = 0, \ldots, m$. Nach Definition 4.9.6 gibt es für festes k genau $S(n,k)$ solche Partitionen, insgesamt also

$$\sum_{k=0}^{m} S(n,k).$$

(b) Injektive Abbildungen: Nach Satz 2.3.6 gibt es eine injektive Abbildung $f : N \to M$ nur wenn $n \leq m$. Durch Permutation von M können wir erreichen, dass $f(i) = i$ für alle $i \in N$. Alle solchen Abbildungen liegen also in derselben Äquivalenzklasse.

(c) Surjektive Abbildungen: Corollar 4.9.22.

(d) Bijektive Abbildungen: Folgt aus $3(c)$, da jede bijektive Abbildung auch injektiv ist.

4) Modulo $\approx$ (Permutation von N und M):

(c) Surjektive Abbildungen: Wie $2(c)$, nur erhalten wir durch zusätzliche Permutation von M eine ungeordnete Zahlpartition. Nach Satz 4.10.1 gibt es $P(n,m)$ solche Partitionen.

(a) Abbildungen: Folgt aus $4(c)$, da jede Gleichung

$$n = p_1 + \ldots + p_m$$

mit $p_i \geq 0$ einer Gleichung

$$n + m = (p_1 + 1) + \ldots + (p_m + 1)$$

entspricht.

(b) Injektive Abbildungen: Folgt aus $3(b)$, da

$$f \simeq g \Rightarrow f \approx g.$$

(d) Bijektive Abbildungen: Folgt aus $3(d)$, da

$$f \simeq g \Rightarrow f \approx g.$$

■

4.13 Übungsaufgaben

Übung 4.1 *Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

1) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$

2) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$

Übung 4.2 *In einem amerikanischen Stadtplan mit $n+1$ Avenues und $m+1$ Streets (siehe Abbildung 4.4) wollen wir von Punkt A nach Punkt B gehen. Wieviele kürzeste Wege gibt es?*

Beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion nach $n+m$.

Übung 4.3 *Sei K ein Körper und $c \in K$. Zeigen Sie, dass für alle Polynome $p, q \in K[X]$ gilt*

$$(p \cdot q)(c) = p(c) \cdot q(c) \qquad (p+q)(c) = p(c) + q(c).$$

Übung 4.4 *1) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome $K[X]$ zusammen mit der in Definition und Satz 4.2.14 definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit 1 ist.*

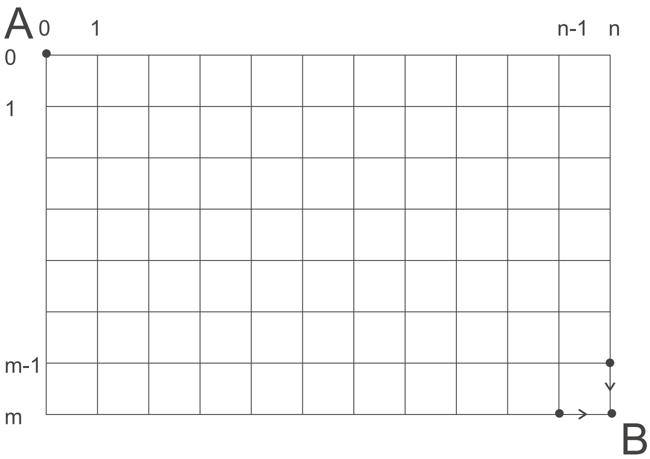


Abbildung 4.4: Wieviele kürzeste Wege gibt es von A nach B.

2) *Implementieren Sie Addition und Multiplikation für die dicht besetzte Darstellung von Polynomen* $f = a_0 + a_1X^1 + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{Q}[x]$ *als Liste* $(a_0, \ldots, a_n)$ *mit* $a_n \neq 0$.

Übung 4.5 1) *Bestimmen Sie mit Hilfe der Siebformel die Anzahl der ganzen Zahlen* $1 \leq n \leq 1000000$, *die durch* $2, 3, 5$ *oder* 7 *teilbar sind.*

2) *Schreiben Sie ein Programm, das für gegebenes* N *mittels Division mit Rest die Anzahl aller durch* $2, 3, 5$ *oder* 7 *teilbaren Zahlen* $1 \leq n \leq N$ *bestimmt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus 1).*

Hinweis: Sie können die MAPLE*-Funktion* `irem` *verwenden.*

Übung 4.6 1) *Der Eintrittspreis für ein Kino sei* 10 €. *Die Kinokasse wurde gerade geleert und es warten noch* 6 *Leute,* 2 *davon haben genau einen* 20 € *Schein und* 4 *genau einen* 10 € *Schein. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Warteschlange zu bilden, sodass der Kassierer stets genügend Wechselgeld hat?*

2) *In einem Stadtplan mit* $n + 1$ *Avenues und* $m + 1$ *Streets (siehe Abbildung 4.5) wollen wir von Punkt* A *nach Punkt*

B gehen. In dem Gebiet unterhalb der Winkelhalbierenden treiben Straßengangs ihr Unwesen (Punkte auf der Winkelhalbierenden sind also noch sicher). Zeigen Sie, dass es für $n \geq m$ genau

$$\binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1}$$

sichere kürzeste Wege von A nach B gibt.

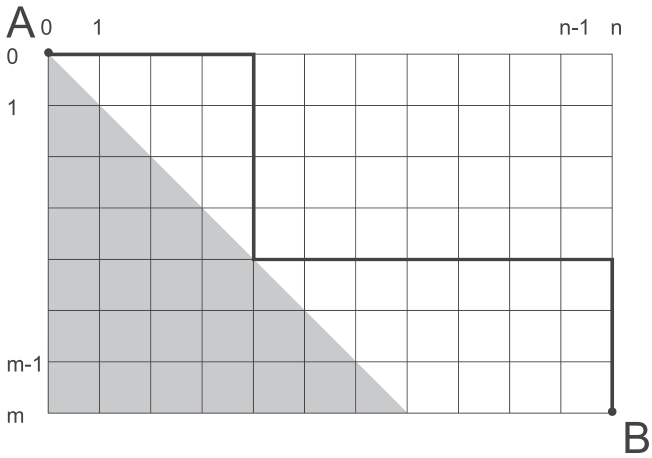


Abbildung 4.5: Kürzeste Wege oberhalb der Winkelhalbierenden.

Übung 4.7 *1) Ein zerstreuter Professor hat 4 verschiedene Briefe geschrieben, zugeklebt, aber nicht adressiert. Nun schreibt er zufällig die 4 Adressaten auf die Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der Empfänger den für ihn bestimmten Brief bekommt?*

2) Bestimmen Sie die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen einer n-elementigen Menge, d.h. die Anzahl der bijektiven Abbildungen $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ mit

$$f(x) \neq x \quad \text{für alle } x \in \{1, ..., n\}.$$

Hinweis: Siebformel.

Übung 4.8 *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\varphi(n) = |\{r \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq r \leq n,\ \mathrm{ggT}(r, n) = 1\}|$$

die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen. Sei weiter

$$T(n) = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim und } p \text{ teilt } n\}$$

die Menge der Primteiler von n.

1) *Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel, dass für alle n gilt*

$$\varphi(n) = n \prod_{p \in T(n)} (1 - \frac{1}{p})$$

2) *Erstellen Sie einen Plot von $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \varphi(n)$ für $n = 1, ..., 2000$.*

Bemerkung: Die Eulersche Phi-Funktion φ spielt eine wichtige Rolle im RSA Public-Key-Kryptosystem.

Übung 4.9 *Welche Elemente der S_4 lassen sich als Symmetrien des Quadrats (Abbildung 4.6) interpretieren?*

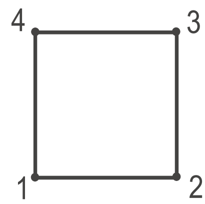


Abbildung 4.6: Quadrat mit Nummerierung der Ecken.

Übung 4.10 *Bei einem Würfelspiel wird der Würfel 7-mal geworfen und man gewinnt, wenn dabei alle Zahlen $1, ..., 6$ mindestens einmal auftreten.*

1) *Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?*

2) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand einer Stichprobe von 100000 *Durchläufen des Spiels.*

Hinweis: Sie dürfen dazu den Computer verwenden. Die MAPLE-*Funktion* `rand(n)()` *liefert eine Zufallszahl aus der Menge* $\{0, ..., n-1\}$.

Übung 4.11 *1) Ein zerstreuter Professor will* 5 *verschiedene Geschenke auf* 3 *Päckchen verteilen. Die Päckchen sehen von außen alle gleich aus. Nachdem er alle Möglichkeiten durchprobiert und aufgeschrieben hat, stellt er fest, dass er eines der Geschenke vergessen hat (er hat also nur* 4 *Geschenke auf* 3 *Päckchen verteilt). Wie kann er seinen Fehler korrigieren, ohne nochmals komplett von vorne anzufangen?*

2) Zeigen Sie, dass für die Stirlingzahlen gilt

$$S(n+1, m+1) = S(n, m) + (m+1) \cdot S(n, m+1)$$

für alle $n, m \geq 0$.

3) Bestimmen Sie $S(5, 3)$.

Übung 4.12 *Implementieren Sie ein rekursives Verfahren zur Bestimmung aller Partitionen einer* n*-elementigen Menge in* m *Teile.*

Hinweis: Verwenden Sie den kombinatorischen Beweis der Formel aus Aufgabe 4.11.2.

Übung 4.13 *1) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen auf der Menge* $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

2) Zeigen Sie, dass für die Bellschen Zahlen B_n *gilt* $B_0 = 1$ *und*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

für alle $n \geq 0$.

3) Berechnen Sie B_4.

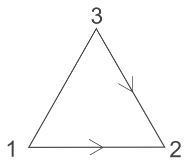
Übung 4.14 *1) Bestimmen Sie alle reflexiven Relationen* $R \subset M \times M$ *auf* $M = \{1,2\}$.

2) Zeigen Sie, dass es auf einer n*-elementigen Menge* M *genau* $2^{n(n-1)}$ *reflexive Relationen gibt.*

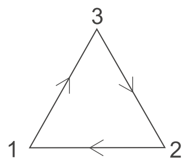
Übung 4.15 *Sei* M *eine Menge mit* n *Elementen. Wieviele Totalordnungen gibt es auf* M*?*

Übung 4.16 *1) In einem Spiel zeichnet man in einem Dreieck auf jeder Kante zufällig einen Pfeil im oder gegen den Uhrzeigersinn oder keinen Pfeil (durch Würfeln mit einem dreiseitigen Würfel). Der Spieler verliert, wenn die Figur mindestens zwei Pfeile enthält und alle Pfeile in dieselbe Richtung zeigen, z.B.*

gewonnen:



verloren:



Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

2) Bestimmen Sie alle Halbordnungen auf $\{1,2,3\}$*. Welche sind Totalordnungen?*

Übung 4.17 *1) Entwickeln Sie einen rekursiven Algorithmus, der für* $n, m \in \mathbb{N}_0$ *alle Zahlpartitionen von* n *in* m *positive Summanden bestimmt.*

Hinweis: Verwenden Sie den Beweis von Satz 4.10.7.

2) Berechnen Sie damit alle Partitionen von 6 *in* 3 *Summanden.*

3) Implementieren Sie Ihren Algorithmus.

Übung 4.18 *Zeigen Sie, dass es für* $n, m \in \mathbb{N}$ *genau*

$$\binom{n-1}{m-1}$$

geordnete Zahlpartitionen von n *in* m *positive Summanden gibt.*

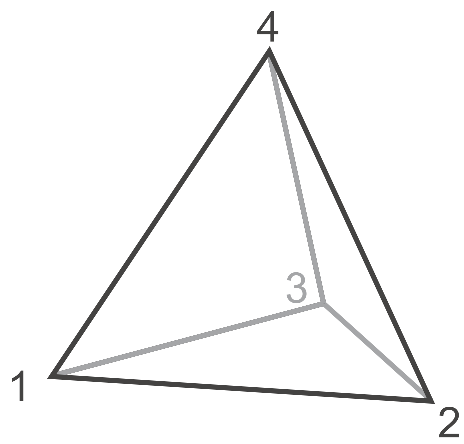


Abbildung 4.7: Tetraeder mit Nummerierung der Ecken

Übung 4.19 *Durch Nummerieren der Ecken können wir die Symmetriegruppe des Tetraeders (Abbildung 4.7) mit der S_4 identifizieren.*

1) *Für festes $f \in S_4$ seien zwei Ecken a und b äquivalent, wenn man durch mehrfaches Anwenden von f die Ecke a auf die Ecke b abbilden kann. Zeigen Sie, dass dadurch eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\{1, \ldots, 4\}$ definiert ist.*

2) *Bestimmen Sie für jedes $f \in S_4$ die Partition von $\{1, \ldots, 4\}$ in Äquivalenzklassen und die entsprechende Zahlpartition $p(f)$ von 4.*

Übung 4.20 *Zwei Elemente $f, g \in S_4$ seien äquivalent wenn $p(f) = p(g)$. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen und geben Sie für jede Klasse eine geometrische Interpretation.*

5

Folgen

5.1 Übersicht

Zur Motivation des Folgen- und Konvergenzbegriffs diskutieren wir kurz drei wichtige Anwendungen aus der Praxis, auf die wir später noch genauer eingehen werden:

5.1.1 Laufzeitabschätzungen

Wie groß ist der Rechenaufwand für die Schulbuchmultiplikation von zwei Binärzahlen a, b der Bitlänge n und wie verhält sich dieser für großes n? Zur Multiplikation der $n = 4$-Bit-Zahlen $a = (0,1,0,1) = 5$ und $b = (0,1,1,1) = 7$ berechnen wir z.B.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

also $a \cdot b = (0,1,0,0,0,1,1) = 35$. Die Rechnung benötigt allgemein maximal

$$l_n = 2n(n-1)$$

Bitadditionen, denn man muss maximal $(n-1)$-mal zu a die Zahl a versetzt addieren. Dazu benötigen wir jeweils n Bitadditionen plus maximal n weitere Bitadditionen für den Übertrag. Es gibt übrigens wesentlich schnellere Multiplikationsverfahren (z.B. den Karatsuba-Algorithmus oder den Schönhage-Strassen-Algorithmus). Was heißt aber schneller?

Die Laufzeit l_n eines Algorithmus lässt sich oft nicht exakt bestimmen, sondern nur nach oben abschätzen. In der Praxis ist häufig auch die genaue Laufzeit nicht relevant, sondern nur deren Verhalten für große n. Um die Laufzeit eines Algorithmus grob einzuteilen, verwendet man die **Landau-Notation**. Beispielsweise sagt man, dass die Laufzeit l_n eines Algorithmus in $O(h_n)$ ist, wenn l_n nicht schneller als h_n für großes n steigt. Für l_n in $O(n)$ sprechen wir von einer linearen Laufzeit, für l_n in $O(n^2)$ von einer quadratischen, allgemeiner für l_n in $O(n^k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ von einer polynomialen und für l_n in $O(\exp(n))$ von einer exponentiellen Laufzeit. Als grobe Einteilung, ist ein Algorithmus mit polynomialer Laufzeit schnell, ein Algorithmus mit exponentieller (aber nicht polynomialer) Laufzeit dagegen langsam.

Wie können wir nun für zwei Folgen von Zahlen l_n und h_n die Formulierung

$$l_n \text{ steigt nicht schneller als } h_n$$

mathematisch präzise fassen? Eine in der Praxis hinreichend genaue Klassifikation erhalten wir, wenn wir fordern, dass

$$\frac{l_n}{h_n}$$

sich für große n einer Konstanten annähert. Die Laufzeit der Binärmultiplikation ist zum Beispiel in $O(n^2)$, denn

$$\frac{l_n}{n^2} = \frac{2n^2 - 2n}{n^2} = 2 - \frac{2}{n}$$

nähert sich für großes n der Konstanten 2 an, da $\frac{2}{n}$ dann beliebig klein wird. Für diesen Grenzwertprozess schreiben wir auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n^2} = 2.$$

Man sagt: Die Folge $\frac{l_n}{n^2}$ konvergiert gegen 2. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, mathematisch exakte Verfahren zur Untersuchung solcher Grenzwertprozesse zu entwickeln.

5.1.2 Stetigkeit von Funktionen

Auch bei der Untersuchung von Funktionen werden Folgen eine wichtige Rolle spielen. Für eine Folge $x_n > 0$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, erhalten wir für $f(x) = \frac{1}{x}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

für eine Folge $x_n < 0$ aber

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

siehe dazu Abbildung 2.7. Mit diesem Verfahren kann man al-

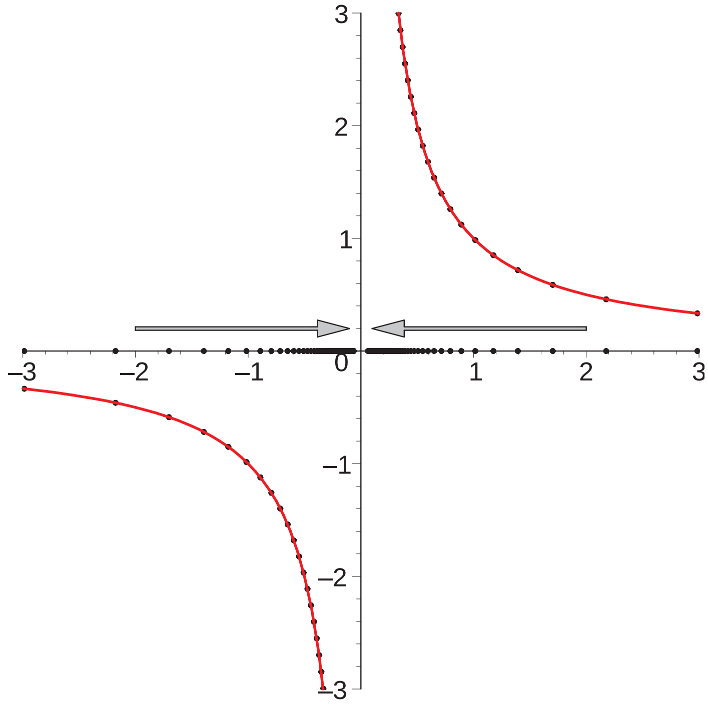


Abbildung 5.1: Untersuchung von Stetigkeit mittels Folgen

so feststellen, ob kleine Änderungen von x auch nur zu kleinen Änderungen des Funktionswerts $f(x)$ führen. Die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

bezeichnet man als Stetigkeit von f in x. Die Hyperbel ist also nicht stetig in $x = 0$. Man kann zeigen, dass sie stetig ist in allen $x \neq 0$.

5.1.3 Konstruktion der reellen Zahlen

Warum benötigen wir die reellen Zahlen überhaupt und was sind sie? Betrachten wir ein Quadrat mit Seitenlänge 1 wie in Abbildung 5.2. Welche Länge d hat die Diagonale? Nach dem Satz von

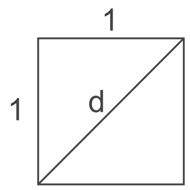


Abbildung 5.2: Diagonale im Quadrat.

Pythagoras gilt

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

also

$$d = \sqrt{2}.$$

In Satz 1.2.4 haben wir gezeigt, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Allerdings lässt sich $\sqrt{2}$ als unendlicher Dezimalbruch schreiben. In MAPLE können wir eine beliebige große, aber endliche, Anzahl n von Nachkommastellen dieses Dezimalbruchs berechnen, z.B. für $n = 50$:

```
evalf(sqrt(2),50);
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769
```

Ist a_n eine Dezimalbruchnäherung von $\sqrt{2}$ mit n Nachkommastellen, dann können wir den unendlichen Dezimalbruch $\sqrt{2}$ darstellen als die Folge von Dezimalbrüchen $(a_0, a_1, ...)$, also

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1.4 \\ a_2 &= 1.41 \\ a_3 &= 1.414 \\ a_4 &= 1.4142 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir werden auch einen Algorithmus kennenlernen, der diese Folge explizit berechnet.

Die Idee ist also, statt rationale Zahlen solche unendlichen Dezimalbrüche zu verwenden. **Unendliche Dezimalbrüche** definieren wir als Folgen $(a_0, a_1, ...)$ von **Dezimalbrüchen**

$$\begin{aligned} a_n &= s_0 \ . \ s_1 s_2 ... s_n \cdot 10^k \\ &= s_0 \cdot 10^k + s_1 \cdot 10^{k-1} + ... + s_n \cdot 10^{k-n} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

in denen die ersten $n+1$ Stellen von a_n und a_{n+1} übereinstimmen. Ein solche Darstellung des Dezimalbruchs a_n bezeichnet man in der Informatik auch als **Fließkommazahl** (floating point number) mit $n+1$ Stellen (siehe dazu Übungsaufgabe 5.4). Auch jede rationale Zahl lässt sich mittels der Schulbuchdivision als unendlicher Dezimalbruch schreiben, z.B.

$$\begin{array}{lcccc} 2 & : & 3 & = & 0.66... \\ 20 & & & & \\ -18 & & & & \\ \hline \ \ 20 & & & & \\ \ \ \ \vdots & & & & \end{array}$$

also

$$\frac{2}{3} = 0.666...$$

Siehe dazu auch Übung 5.9.

Bei diesem Zahlbegriff gibt es allerdings noch ein kleines Problem: Verschiedene unendliche Dezimalbrüche können dieselbe Zahl darstellen, z.B.

$$1.000... = 0.999...$$

denn die Dezimalbruchfolgen

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \\ b_n &= 9 \cdot 10^{-1} + ... + 9 \cdot 10^{-n} \end{aligned}$$

konvergieren in $\mathbb{Q}$ und haben denselben Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Wir müssen deshalb zwei unendliche Dezimalbrüche identifizieren, wenn ihre Differenz gegen 0 konvergiert, d.h.

$$\mathbb{R} = \{\text{unendliche Dezimalbrüche}\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$(a_0, a_1, \dots) \sim (b_0, b_1, \dots) \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Wir werden zeigen, dass jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $c \geq 0$ eine eindeutige Quadratwurzel $\sqrt{c} \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{c} \geq 0$ besitzt.

5.2 Folgen

Definition 5.2.1 *Sei M eine Menge. Eine **Folge** in M ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to M \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Wir schreiben für die Folge kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (a_n).

Eine Folge kann man also als eine unendliche Liste

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

von Elementen von M auffassen.

Wie bei Listen in vielen Programmiersprachen ist es oft nützlich, die Indizierung bei 0 zu beginnen. Deshalb bezeichnen wir auch eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &\to M \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

als Folge und schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beispiel 5.2.2 *Die **konstante Folge** $a_n = c$ (Abbildung 5.3) gibt die Liste $(c, c, c, \dots)$.*

Die Folge $a_n = \frac{2}{n}$ (Abbildung 5.4) beginnt mit $(2, 1, \frac{2}{3}, \dots)$.

Die Folge $a_n = 2 - \frac{2}{n}$ (Abbildung 5.5) aus der Laufzeitanalyse der Binärmultiplikation startet mit $(0, 1, \frac{4}{3}, \dots)$.

Die Folge $a_n = (-1)^n$ (Abbildung 5.6) können wir als die unendliche alternierende Liste $(-1, 1, -1, \dots)$ auffassen.

In Maple lässt sich beispielsweise ein Plot von $a_n = 2 - \frac{2}{n}$ erzeugen mit:

```
with(plots);
A:=[seq([n, 2-2/n], n=1..10)];
pointplot(A);
```

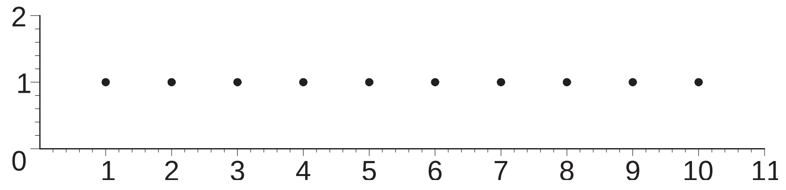


Abbildung 5.3: Konstante Folge $a_n = 1$

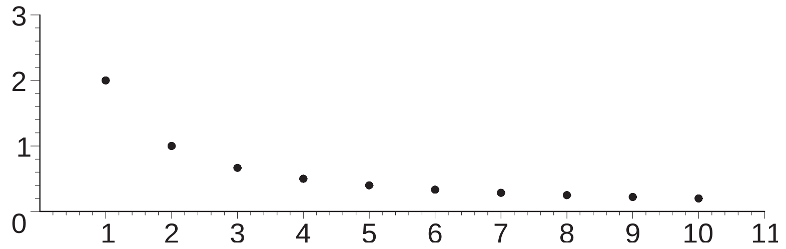


Abbildung 5.4: Folge $a_n = \frac{2}{n}$

Die wichtigste Frage ist natürlich, ob für eine gegebene Folge (a_n) überhaupt ein Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Beispielsweise nimmt $a_n = (-1)^n$ alternierend den Wert 1 bzw. -1 an, nähert sich also offenbar keiner einzigen Zahl an. Zur Klärung dieser Frage führen wir im Folgenden den Begriff der Konvergenz ein.

5.3 Konvergenz

Für einen formalen Konvergenzbegriff benötigen wir einen Abstandsbegriff, denn wir wollen sagen, dass für n groß genug der Abstand von a_n und einem Grenzwert a beliebig klein wird. Dazu verwenden wir den Absolutbetrag, den wir in jedem angeordneten Körper haben:

Definition 5.3.1 *Ein* ***angeordneter Körper*** *ist ein Körper K mit einer Totalordnung $\leq$, die verträglich mit Addition und Multiplikation ist, d.h. für alle $a, b, c \in K$ gilt*

1) *Ist $a \leq b$, dann $a + c \leq b + c$*

2) *Ist $0 \leq a$ und $0 \leq b$, dann $0 \leq a \cdot b$*

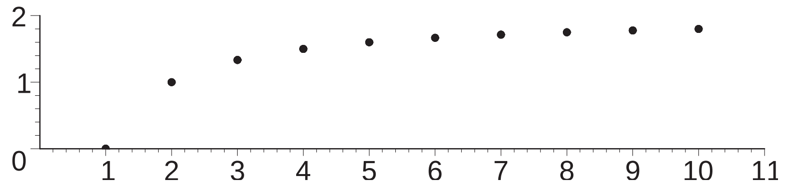


Abbildung 5.5: Folge $a_n = 2 - \frac{2}{n}$

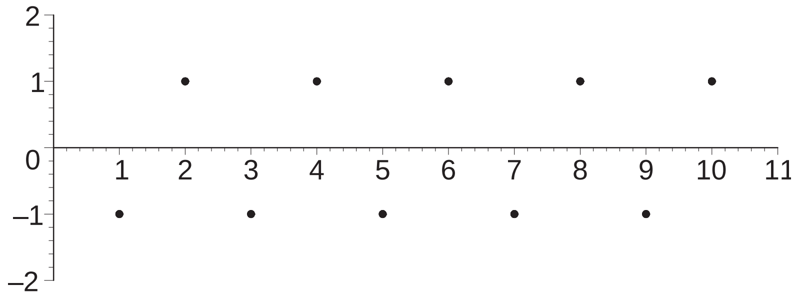


Abbildung 5.6: Folge $a_n = (-1)^n$

Wir schreiben $a \geq b$ wenn $b \leq a$. Außerdem schreibt man $a < b$ wenn $a \leq b$ und $a \neq b$ (und analog für $>$).

Beispiel 5.3.2 *Mit der in Bemerkung 3.4.7 definierten Totalordnung ist $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper, z.B.*

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{3}{2}$$

Auch der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist angeordnet. Darauf werden wir noch genauer zurückkommen.

Bemerkung 5.3.3 *Ist K ein angeordneter Körper und $a \in K$, dann gilt*

$$a^2 \geq 0.$$

Für $a \geq 0$ folgt dies direkt mit Punkt (2) von Definition 5.3.1. Für $a \leq 0$ ist $-a \geq 0$ mit Punkt (1), also mit Punkt (2) wieder $a^2 = (-1)^2 \geq 0$.

Insbesondere gilt

$$1 > 0.$$

Dies impliziert, dass die Abbildung $\mathbb{Z} \to K$, $k \mapsto k \cdot 1$ injektiv ist. Jeder angeordnete Körper enthält also $\mathbb{Z}$ und somit auch $\mathbb{Q}$.

Definition 5.3.4 *Sei K ein angeordneter Körper. Die Betragsfunktion $K \to K$ ist definiert durch*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Die Basis für den Beweis fast aller Konvergenzaussagen ist die Dreiecksungleichung:

Proposition 5.3.5 (Dreiecksungleichung) *Sei K ein angeordneter Körper. Es gilt*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

für alle $a, b \in K$.

Beweis. Nach der Definition des Absolutbetrags ist $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$, ebenso für b, also

$$a + b \leq |a| + |b|$$

und

$$-(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$$

also $|a+b| \leq |a| + |b|$. ∎

Definition 5.3.6 *Sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge (a_n) in K heißt* ***konvergent*** *gegen den* ***Grenzwert*** *$a \in K$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Ist (a_n) konvergent gegen ein $a \in K$, so bezeichnet man (a_n) auch einfach als konvergent, anderenfalls als ***divergent****.*

Bemerkung 5.3.7 *Die Definition können wir uns als Spiel vorstellen:*

1) *Spieler A gibt ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor.*

2) Spieler B muss dann ein N finden, sodass der Abstand von a_N zu a kleiner ist als ε, und auch alle weiteren Folgeglieder innerhalb dieses Abstands bleiben.

Die Folge (a_n) ist konvergent gegen a, wenn Spieler B immer gewinnt.

Definition und Satz 5.3.8 *Sei K ein angeordneter Körper. Der Grenzwert a einer konvergenten Folge (a_n) ist eindeutig. Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n := a$ für den Grenzwert.*

Beweis. Angenommen a und b sind Grenzwerte von (a_n) mit $a \neq b$. Dann gilt $|a-b| \neq 0$. Zu $\varepsilon := \frac{1}{3}|a-b| > 0$ gibt es also N_1 und N_2 mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1$$

und

$$|a_n - b| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Somit folgt für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ mit der Dreiecksungleichung (Proposition 5.3.5), dass

$$|a-b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|,$$

ein Widerspruch. ■

Das Verhalten einer konvergenten Folge lässt sich also für sehr große n durch ihren Grenzwert beschreiben.

Beispiel 5.3.9 *Die konstante Folge $a_n = c$ konvergiert gegen c, denn $|a_n - c| = 0$ für alle n.*

Bemerkung 5.3.10 *Eine Folge (a_n) in $\mathbb{Q}$ ist konvergent gegen $a \in \mathbb{Q}$, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$|a_n - a| < \frac{1}{m} \text{ für alle } n \geq N$$

Beweis. Für $\varepsilon = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ mit $x, y > 0$ gilt $\frac{1}{m} < \frac{x}{y}$ wenn $xm > y$. Zu jedem ε können wir also ein m finden mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Umgekehrt kann man auch zu jedem m ein ε finden mit $\varepsilon < \frac{1}{m}$, etwa $\varepsilon = \frac{1}{m+1}$. ■

Beispiel 5.3.11 *In $K = \mathbb{Q}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

denn für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \text{ für alle } n \geq N$$

wenn wir $N := m + 1$ wählen.

In der Interpretation als Spiel aus Bemerkung 5.3.7 gibt Spieler A z.B. den Abstand $\varepsilon = \frac{1}{m} = \frac{1}{12}$ vor. Spieler B gewinnt dann z.B. mit der Antwort $N = 13$. Aber auch jede Zahl $N \geq 13$ wäre eine valide Antwort.

Beispiel 5.3.12 *Die Folge $a_n = (-1)^n$ konvergiert nicht.*

Beweis. Wäre (a_n) konvergent, dann gäbe es ein N und einen Grenzwert $a \in \mathbb{Q}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \text{ für alle } n \geq N$$

und somit gilt mit der Dreiecksungleichung (Proposition 5.3.5)

$$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2$$

ein Widerspruch. ∎

Es gibt aber auch Folgen (a_n), die zwar nicht konvergieren, aber für die wir zumindest noch eine Aussage über ihr Verhalten für große n machen können:

Definition 5.3.13 *Sei K ein angeordneter Körper. Gibt es zu jedem $\varepsilon \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$a_n > \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

*dann heißt (a_n) **bestimmt divergent** gegen ∞ und wir schreiben*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Gibt es zu jedem $\varepsilon \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N$$

dann heißt (a_n) bestimmt divergent gegen $-\infty$ und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

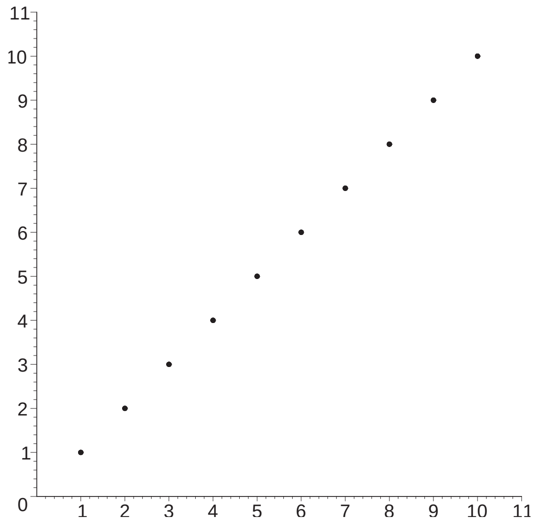


Abbildung 5.7: Folge $a_n = n$

Siehe dazu auch Übung 5.8.

Beispiel 5.3.14 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, *siehe Abbildung 5.7. Dagegen ist z.B.* $a_n = (-1)^n \cdot n$ *nicht bestimmt divergent, siehe Abbildung 5.8.*

Schneiden wir endlich viele Folgeglieder am Anfang einer Folge ab, ändert dies nichts an ihrem Grenzwert:

Notation 5.3.15 *Gegeben eine Folge* (c_n) *und* $N \in \mathbb{N}$, *schreiben wir* $(c_n)_{n\geq N}$ *für die Folge* $(c_N, c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots)$.

Bemerkung 5.3.16 *Ist* (c_n) *konvergent, dann auch* $(c_n)_{n\geq N}$ *für jedes* N, *und beide Folgen haben denselben Grenzwert.*

Beweis. Ist $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N'$, dann auch $|a_{N+n-1} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N'$. ∎

Wir müssen also in der Schreibweise $\lim_{n\to\infty} c_n$ nicht zwischen den Folgen (c_n) und $(c_n)_{n\geq N}$ unterscheiden.

Wie kann man also nun Grenzwerte bestimmen, ohne dabei immer auf die Konvergenzdefinition zurückzugreifen? Dabei helfen die folgenden Rechenregeln:

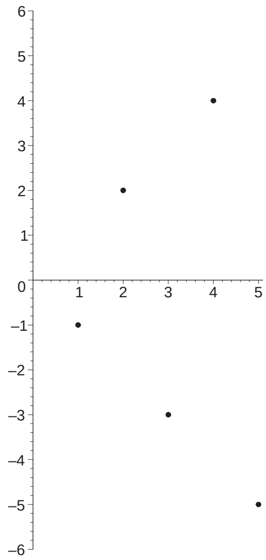


Abbildung 5.8: Folge $a_n = (-1)^n \cdot n$

Satz 5.3.17 *Sei K ein angeordneter Körper und (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in K mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Ist außerdem $a \neq 0$, dann gibt es ein N mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq N}$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Beispiel 5.3.18 *Für*

$$a_n = \frac{2n^2 - n}{n^2} = 2 - \frac{1}{n}$$

gilt mit Beispiel 5.3.9 und 5.3.11 und den Rechenregeln aus Satz 5.3.17 dass (a_n) konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2.$$

Mit MAPLE *können wir diesen Grenzwert folgendermaßen berechnen:*

```
limit((2*n^2-n)/n^2, n=infinity);
2
```

Wir beweisen nun Satz 5.3.17:

Beweis. Zur Aussage über Summen: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ gibt es N_1 und N_2 mit

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1$$

und

$$|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Es folgt also mit der Dreiecksungleichung (Proposition 5.3.5)

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

für alle $n \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Zur Aussage über Inverse: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, dann gibt es ein N mit $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ für alle $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann

$$|a_n| \geq |a| - |a - a_n| > \frac{1}{2}|a| > 0,$$

also $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N' mit $|a_n - a| < \varepsilon\frac{|a|^2}{2}$ für alle $n \geq N'$. Somit gilt

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a| \cdot |a_n|} \cdot |a_n - a| < \frac{2}{|a|^2} \cdot |a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq \max\{N, N'\}$.

Zum Beweis der Aussage über Produkte siehe Aufgabe 5.7. Dazu verwenden wir das folgende Lemma 5.3.21. ■

Definition 5.3.19 *Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein $C \in K$ gibt mit $a_n \leq C$ für alle n. Sie heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $C \in K$ gibt mit $a_n \geq C$ für alle n. Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.*

Bemerkung 5.3.20 *Eine Folge (a_n) ist beschränkt genau dann, wenn es ein $C \in K$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n.*

Lemma 5.3.21 *Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.*

Beweis. Sei a der Grenzwert. Es gibt ein N mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung ist also

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

für alle $n \geq N$. Mit

$$C = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a|\}.$$

ist also

$$|a_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Beispiel 5.3.22 *Die Folge $a_n = 2 + \frac{2}{n}$ hat den Grenzwert $a = 2$. Im Beweis des Lemmas können wir $N = 3$ wählen. Dann ist $|a_n|$ beschränkt durch $C = \max\{4, 3, 1 + 2\} = 4$.*

5.4 Die reellen Zahlen

5.4.1 Dezimalbrüche

Definition 5.4.1 *Ein **Dezimalbruch** ist eine Zahl*

$$\pm s_0.s_1 s_2 ... s_n \cdot 10^k = \pm(s_0 \cdot 10^k + s_1 \cdot 10^{k-1} + ... + s_n \cdot 10^{k-n}) \in \mathbb{Q}$$

mit Dezimalstellen $s_i \in \{0, ..., 9\}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Definition 5.4.2 *Ein **unendlicher Dezimalbruch** ist eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Dezimalbrüchen*

$$\begin{aligned} a_0 &= \pm s_0 \cdot 10^k \\ a_1 &= \pm s_0.s_1 \cdot 10^k \\ &\vdots \\ a_n &= \pm s_0.s_1 s_2 ... s_n \cdot 10^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit festen Vorzeichen, $k \in \mathbb{Z}$ und einer Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Dezimalstellen $s_i \in \{0, ..., 9\}$.

Beispiel 5.4.3 *Als unendlicher Dezimalbruch wird* $\sqrt{2}$ *dargestellt durch die Folge*

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1.4 \\ a_2 &= 1.41 \\ a_3 &= 1.414 \\ a_4 &= 1.4142 \\ &\vdots \end{aligned}$$

mit $k = 0$ *und den Dezimalstellen*

i	0	1	2	3	4	...
s_i	1	4	1	4	2	...

Jedes Folgeglied eines unendlichen Dezimalbruchs kann man schreiben als Summe

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} s_i \cdot 10^{k-i}.$$

Eine Folge, die in einer solchen Summendarstellung gegeben ist, bezeichnet man auch als Reihe. Auf Reihen werden wir im nächsten Abschnitt noch zurückkommen.

Unsere Grundidee war es, reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von unendlichen Dezimalbrüchen (a_n) darzustellen. Allerdings ist unklar, wie man unendliche Dezimalbrüche addieren soll, da man ja wie bei Fließkommazahlen bei der kleinsten Stelle anfangen müsste, aber ein derartiger Dezimalbruch unendlich viele Stellen haben kann. Wir können einfach die Folge (a_n+b_n) bilden, dies führt aber zu dem folgenden Problem:

Beispiel 5.4.4 *Gliedweise Addition von*

$$(a_n) = 1.414213562...$$

und

$$(b_n) = 1.732050808...$$

gibt

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= 1 + 1 = 2 \\ a_1 + b_1 &= 1.4 + 1.7 = 3.1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

das Resultat ist also kein unendlicher Dezimalbruch.

Um die Arithmetik von reellen Zahlen einfacher beschreiben zu können, verallgemeinern wir daher den Begriff des unendlichen Dezimalbruchs noch etwas. Die Folge $(a_n + b_n)$ hat glücklicherweise immer noch die folgende wesentliche Eigenschaft eines unendlichen Dezimalbruchs:

5.4.2 Cauchyfolgen

Definition 5.4.5 *Sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Der Abstand zwischen den Folgegliedern wird also beliebig klein.

Proposition 5.4.6 *Sei K ein angeordneter Körper. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Ist (a_n) konvergent gegen $a \in K$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n \geq N$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N$. ∎

Das wesentliche Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass in $\mathbb{R}$ auch die Umkehrung gilt, d.h. jede Cauchyfolge konvergent ist. Zunächst wollen wir aber überprüfen, dass jeder unendliche Dezimalbruch eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist.

Definition 5.4.7 *Ein angeordneter Körper K heißt **Archimedisch**, wenn es zu jedem $r \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n > r$.*

Beispiel 5.4.8 *Der Körper $\mathbb{Q}$ ist Archimedisch: Ist $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \leq n \cdot b$. Wie wir noch sehen werden ist auch $\mathbb{R}$ Archimedisch.*

Lemma 5.4.9 *Ist K Archimedisch und $x \in K$ mit $-1 < x < 1$, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Beweis. Für $x = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $|x| < 1$ und $x \neq 0$. Da K Archimedisch ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Wir müssen also nur zeigen: Zu jedem $m > 0$ gibt es ein N, sodass für alle $n \geq N$

$$|x|^n = |x^n| < \frac{1}{m},$$

äquivalent

$$m < \left(\frac{1}{|x|}\right)^n.$$

Mit Satz 4.2.20 gilt

$$(1+y)^n \geq 1 + \binom{n}{1} y = 1 + ny,$$

mit $y = \frac{1}{|x|} - 1$ also

$$\left(\frac{1}{|x|}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|x|} - 1\right).$$

Da K archimedisch ist und $y > 0$, existiert ein n mit

$$1 + n\left(\frac{1}{|x|} - 1\right) > m.$$

■

Beispiel 5.4.10 *Mit* MAPLE *erhalten wir z.B. für $x = \frac{1}{2}$:*

```
limit((1/2)^n, n=infinity);
0
```

Corollar 5.4.11 *Jeder unendliche Dezimalbruch ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Ist (a_n) ein unendlicher Dezimalbruch, dann gilt für $n > m$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \sum_{i=m+1}^{n} s_i \cdot 10^{k-i} \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} (10-1)10^{k-i} = \sum_{i=m+1}^{n} (10^{k-i+1} - 10^{k-i}) \\ &= 10^{k-m} - 10^{k-n} < 10^{k-m} \end{aligned}$$

Da mit Lemma 5.4.9 gilt $\lim_{m\to\infty} 10^{k-m} = 0$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n > m > N$. ∎

Mit Lemma 5.4.9 erhalten wir außerdem ein Kriterium für die Cauchyfolgeneigenschaft. Dieses ist z.B. nützlich, um Aufgabe 5.5 zu lösen.

Corollar 5.4.12 *Sei (a_n) eine Folge in einem Archimedischen Körper. Gibt es ein $0 < \lambda < 1$ mit*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \lambda\, |a_n - a_{n-1}|$$

für alle n, so ist (a_n) eine Cauchyfolge.

Für den Beweis verwenden wir die geometrische Summenformel, die eine Vielzahl von Anwendungen in der Mathematik und Informatik hat:

Lemma 5.4.13 (Geometrische Summenformel) *Sei K ein Körper. Ist $1 \neq \lambda \in K$, dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Die Formel zeigt man mit vollständiger Induktion (siehe Übung 5.13). Wir beweisen nun Corollar 5.4.12:

Beweis. Mit Induktion gilt

$$|a_{n+1} - a_n| < \lambda^{n-1}\, |a_2 - a_1|$$

für alle n. Die Dreiecksungleichung liefert für $n > m$

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leq |a_2 - a_1| \cdot \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^{k-1} \\ &= |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} - \frac{1-\lambda^{m-1}}{1-\lambda} \right) \\ &= \frac{|a_2 - a_1|}{1-\lambda} (\lambda^{m-1} - \lambda^n) \leq \frac{|a_2 - a_1|}{1-\lambda} \lambda^{m-1}\end{aligned}$$

Da mit Lemma 5.4.9 gilt $\lim_{m\to\infty} \lambda^{m-1} = 0$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n > m > N$. ■

Definition 5.4.14 *Ist K ein Körper, dann heißt $a \in K$ eine n-te* ***Wurzel*** *von $d \in K$ wenn*

$$a^n = d.$$

Für $n = 2$ bezeichnen wir a auch als eine ***Quadratwurzel*** *von d.*

Mit Hilfe von Lemma 5.4.9 lässt sich auch ein Algorithmus beschreiben, der $\sqrt{2}$ berechnet:

Beispiel 5.4.15 *Eine Cauchyfolge, die $\sqrt{2}$ darstellt, erhält man folgendermaßen: Die Grundidee ist, die positive Nullstelle von $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2 - 2$ zu bestimmen, siehe Abbildung 5.9. Wir konstruieren induktiv Folgen (a_n) und (b_n) von rationalen Zahlen mit*

$$a_n^2 < 2 < b_n^2$$

und

$$\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0.$$

Da $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$, beginnen wir mit

$$a_1 = 0,\ b_1 = 2.$$

Sind a_n und b_n konstruiert, setze $c = \frac{a_n + b_n}{2}$. Ist $f(c) = c^2 - 2 < 0$, dann definiere $a_{n+1} = c$ und $b_{n+1} = b_n$. Für $f(c) = c^2 - 2 > 0$, definiere $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c$. Man beachte, dass $f(c) = 0$ nicht möglich ist, da $c \in \mathbb{Q}$, nach Satz 1.2.4 aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

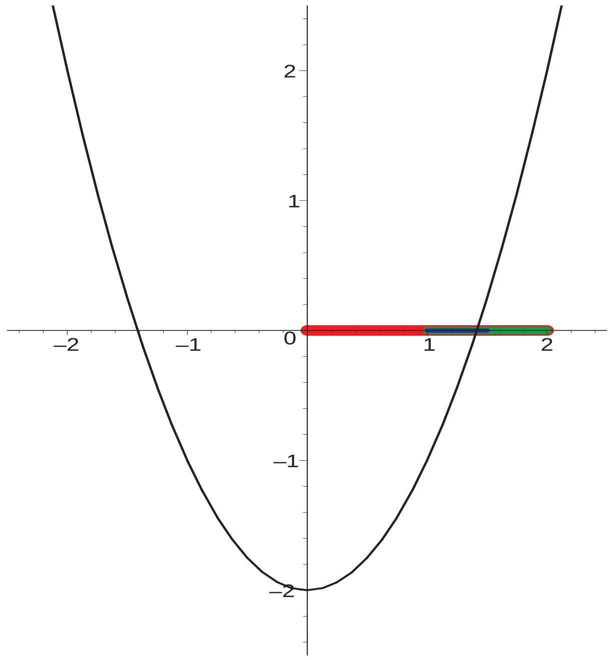


Abbildung 5.9: Intervallschachtelung

Da das Intervall zwischen a_n und b_n in jedem Schritt halbiert wird, gilt

$$|a_n - b_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

für alle n, also $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ mit Lemma 5.4.9.

Die Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, denn für alle $m \geq n$ gilt

$$a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$$

also

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - b_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Ebenso ist (b_n) eine Cauchyfolge.

Die ersten Folgeglieder sind

n	a_n	b_n	c	$f(c)$
1	0	2	1	-1
2	1	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$
3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{16}$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$	$-\frac{7}{64}$
5	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

also gilt

$$1.375 = \frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} = 1.5$$

Ebenso kann man auch Quadratwurzeln von anderen Zahlen berechnen. Es gibt Folgen, die wesentlich schneller gegen die Quadratwurzel konvergieren, siehe dazu Aufgabe 5.10. Darauf werden wir noch im nächsten Abschnitt zurückkommen.

5.4.3 Konstruktion der reellen Zahlen

Um für jede reelle Zahl eine eindeutige Darstellung zu haben, müssen wir noch Cauchyfolgen miteinander identifizieren, wenn sie dieselbe reelle Zahl repräsentieren, etwa (a_i) und (b_i) aus Beispiel 5.4.15 oder die unendlichen Dezimalbrüche 1.00... und 0.99.... Dazu gehen wir wie folgt vor:

Definition 5.4.16 *Eine Nullfolge (a_n) ist eine Folge mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definition 5.4.17 *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen $[(a_n)]$ von Cauchyfolgen (a_n) in $\mathbb{Q}$ bezüglich der Äquivalenzrelation definiert durch*

$$(a_n) \sim (b_n) \Longleftrightarrow (a_n - b_n) \text{ ist eine Nullfolge,}$$

also

$$\mathbb{R} = \{\text{Cauchyfolgen in } \mathbb{Q}\}/\sim .$$

Stimmt aber Definition 5.4.17 mit unserer Grundidee

$$\mathbb{R} = \{\text{unendliche Dezimalbrüche}\}/\sim$$

aus der Einleitung überein? Tatsächlich werden wir später zeigen, dass es zu jeder Cauchyfolge einen unendlichen Dezimalbruch gibt, der sich von dieser nur um eine Nullfolge unterscheidet. Jede reelle Zahl lässt sich also durch einen unendlichen Dezimalbruch repräsentieren.

Nun zur Körperstruktur von $\mathbb{R}$:

Lemma 5.4.18 *Sind (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, dann auch $(-a_n)$, $(a_n + b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$. Die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ ist ein kommutativer Ring mit 1.*

Falls $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n, dann ist $(\frac{1}{b_n})$ eine Cauchyfolge.

Das Lemma zeigt man analog zu Satz 5.3.17. Zum Beweis der Aussage über Produkte benötigen wir wieder eine Aussage zur Beschränktheit:

Lemma 5.4.19 *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. Es gibt ein N mit $|a_n - a_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung ist also

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

für alle $n \geq N$. Mit

$$C = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}.$$

ist also

$$|a_n| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Damit zeigen wir Lemma 5.4.18:

Beweis. Die Aussage für $(-a_n)$ ist klar.

Für die Summe: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung N_1, N_2 mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N_1$$

und
$$|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N_2$$
somit liefert die Dreiecksungleichung
$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon$$
für alle $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Für das Produkt: Lemma 5.4.19 gibt es ein C mit $|a_n| \leq C$ und $|b_n| \leq C$ für alle n. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung N_1, N_2 mit
$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ für alle } n, m \geq N_1$$
und
$$|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ für alle } n, m \geq N_2.$$
Somit gilt mit der Dreiecksungleichung
$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_m b_m| &\leq |a_n b_n - a_n b_m| + |a_n b_m - a_m b_m| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b_m| + |b_m| \cdot |a_n - a_m| < \varepsilon \end{aligned}$$
für alle $n, m \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Den Beweis der Aussage für $(\frac{1}{b_n})$ lassen wir als Übung, ebenso die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze. ∎

Corollar 5.4.20 *Mit der Addition*
$$[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$$
und der Multiplikation
$$[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$$
ist $\mathbb{R}$ ein Körper.

Durch die injektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto [(q)]$ können wir $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen (und diese Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, d.h. respektiert die Addition und Multiplikation).

Beweis. Die Verknüpfungen sind wohldefiniert: Nach Lemma 5.4.18 sind (a_n+b_n) und $(a_n \cdot b_n)$ wieder Cauchyfolgen. Wir zeigen noch die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten: Für

$\lim_{n\to\infty}(a_n - a'_n) = 0$, dann ist auch $\lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) - (a'_n + b_n)) = 0$, also

$$[(a_n + b_n)] = [(a'_n + b_n)].$$

Ebenso ist $\lim_{n\to\infty}((a_n \cdot b_n) - (a'_n \cdot b_n)) = \lim_{n\to\infty}((a_n - a'_n) \cdot b_n) = 0$: Satz 5.4.19 liefert es ein C mit $|b_n| < C$ für alle n. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{C}$, also $|(a_n - a'_n) \cdot b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit gilt

$$[(a_n \cdot b_n)] = [(a'_n \cdot b_n)].$$

Zum multiplikativ Inversen bemerken wir noch: Ist (b_n) eine Cauchyfolge mit $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so gibt es eine Cauchyfolge (b'_n) mit $b'_n \neq 0$ für alle n und $[(b_n)] = [(b'_n)]$. Es ist dann

$$[(b_n)] \cdot [(\frac{1}{b'_n})] = [(b'_n)] \cdot [(\frac{1}{b'_n})] = [(1)].$$

Zur Injektivität: Ist $[(q)] = [(w)]$, dann $0 = \lim_{n\to\infty}(q - w) = q - w$. ∎

Bemerkung 5.4.21 *Der Ring*

$$R = \{\textit{Cauchyfolgen in } \mathbb{Q}\}$$

ist im Gegensatz zu

$$\mathbb{R} = R/\sim$$

kein Körper. Beispielsweise hat die Cauchyfolge $(\frac{1}{n})$ *kein multiplikativ Inverses (warum?). In* $\mathbb{R}$ *haben wir damit kein Problem, denn*

$$[(\frac{1}{n})] = [(0)] = 0$$

wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*. Die Äquivalenzrelation* $\sim$ *identifiziert also alle Elemente von* R*, die sich nicht multiplikativ invertieren lassen mit* 0*.*

Satz 5.4.22 *Der Körper* $\mathbb{R}$ *ist angeordnet durch*

$$[(a_n)] > 0$$

genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{Q}$*,* $c > 0$ *und ein* N *gibt mit*

$$a_n \geq c \textit{ für alle } n \geq N$$

Den Beweis, dass dadurch tatsächlich eine Anordnung definiert wird, lassen wir als Übung. Mit der Anordnung ist unser Konvergenzbegriff aus Abschnitt 5.3 auf $\mathbb{R}$ anwendbar. Weiter ist $\mathbb{R}$ sogar Archimedisch, insbesondere ist Lemma 5.4.9 anwendbar.

Satz 5.4.23 *Der Körper $\mathbb{R}$ ist Archimedisch.*

Beweis. Sei $r = [(a_n)] \in \mathbb{R}$. Da (a_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist, gibt es nach Lemma 5.4.19 ein $C \in \mathbb{Q}$ mit $a_n < C$ für alle n. Da $\mathbb{Q}$ nach Beispiel 5.4.8 Archimedisch ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $C < N - 1$. Somit ist $N - a_n > 1$ für alle n, also $N - r > 0$. ∎

5.4.4 Konvergenzkriterien für $\mathbb{R}$

Definition 5.4.24 *Sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n. Sie heißt **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n.*

Definition 5.4.25 *Ein **Supremum** einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist eine kleinste obere Schranke von M, d.h. ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s \geq m$ für alle $m \in M$, sodass es kein $s' < s$ gibt mit $s' \geq m$ für alle $m \in M$. Entsprechend ist ein **Infimum** eine größte untere Schranke.*

Existiert ein Supremum bzw. Infimum, so ist es offenbar eindeutig.

Beispiel 5.4.26 *Für die Menge*

$$M = \{(-1)^n \cdot (1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

in Abbildung 5.10 gilt

$$\begin{aligned} \sup M &= 1 \\ \inf M &= -1. \end{aligned}$$

Satz 5.4.27 *Jede nach oben beschränkte Teilmenge $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum $\sup M$.*

Jede nach unten beschränkte Teilmenge $\varnothing \neq M \subset \mathbb{R}$ hat ein Infimum $\inf M$.

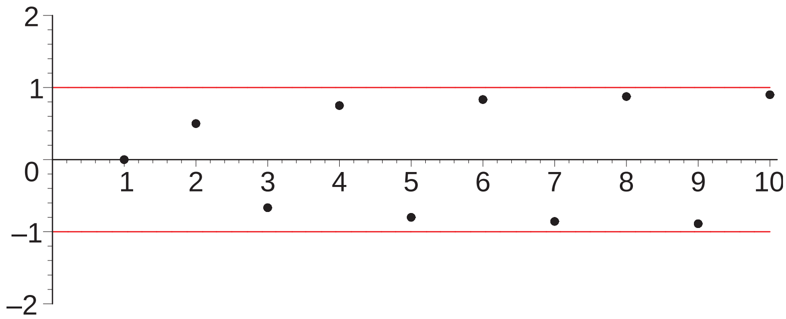


Abbildung 5.10: Supremum und Infimum

Beweis. Da M nach oben beschränkt ist, gibt es eine obere Schranke $b_1 \in \mathbb{R}$ von M. Da $\mathbb{R}$ nach Satz 5.4.23 Archimedisch ist, können wir annehmen, dass $b_1 \in \mathbb{N}$. Da $M \neq \emptyset$ gibt es ebenso ein $a_1 \in \mathbb{N}$, das keine obere Schranke von M ist. Wir konstruieren eine monoton wachsende Folge (a_n) und eine monoton fallende Folge (b_n) in $\mathbb{Q}$, sodass jedes b_n eine obere Schranke von M und jedes a_n keine obere Schranke von M ist. Sind a_n und b_n konstruiert, dann setze $c = \frac{a_n+b_n}{2}$. Ist c eine obere Schranke, definiere $b_{n+1} = c$ und $a_{n+1} = a_n$, sonst definiere $a_{n+1} = c$ und $b_{n+1} = b_n$. Somit gilt

$$b_n - b_m \leq b_n - a_n \leq (b_1 - a_1) \cdot 2^{-n+1} \text{ für alle } m \geq n.$$

Mit Lemma 5.4.9 ist (b_n) eine Cauchyfolge. Sei $s = [(b_n)] \in \mathbb{R}$ die von dieser repräsentierte reelle Zahl. Diese ist eine obere Schranke, denn für alle $m \in M$ gilt, dass

$$s - m \geq 0,$$

da $b_n - m \geq 0$ für alle n. Angenommen s' ist eine kleinere obere Schranke, also $s = [(b_n)] > [(c_n)] = s'$ und $s' \geq m$ für alle $m \in M$. Dann gibt es ein N mit

$$b_n > c_n \geq a_n \text{ für alle } n \geq N.$$

Da $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, folgt $\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$, also $s = s'$, ein Widerspruch.

Die Aussage zum Infimum zeigt man analog. ∎

Satz 5.4.28 *Jede monotone wachsende, von oben beschränkte Folge ist konvergent, ebenso jede monoton fallende, von unten beschränkte Folge.*

Beweis. Eine monoton wachsende beschränkte Folge (a_n) konvergiert gegen

$$a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$s - a_N < \varepsilon$$

Mit der Monotonie ist

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$$

also

$$|a_n - s| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Die Aussage über monoton fallende Folgen ergibt sich durch Anwendung der Aussage über monoton steigende Folgen auf $(-a_n)$. ■

Dieses Kriterium kann man bei Aufgabe 5.6 anwenden.

Definition 5.4.29 *Eine **Teilfolge** einer Folge* $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ *ist eine Folge der Form*

$$(a_{n_i}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$$

mit

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

Lemma 5.4.30 *Sei K ein angeordneter Körper. Jede Folge in K hat eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Wir nennen a_n einen Aussichtspunkt der Folge (a_n), wenn alle weiteren Folgeglieder kleiner sind, d.h. $a_n > a_m$ für alle $m > n$.

- Hat (a_n) unendlich viele Aussichtspunkte, dann bilden diese eine monoton fallende Teilfolge.

- Hat (a_n) keinen Aussichtspunkt, dann gibt es zu jedem $m \geq 1$ ein m' mit $a_m \leq a_{m'}$ und somit eine monoton steigende Teilfolge.

- Anderenfalls existiert ein letzter Aussichtspunkt a_n. Für alle $m > n$ gibt es also ein m' mit $a_m \leq a_{m'}$ und somit wieder eine monoton steigende Teilfolge.

■

Beispiel 5.4.31 *Die Folge $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ hat die monoton fallende Teilfolge (a_{2n}) und die monoton wachsende Teilfolge (a_{2n-1}), siehe Abbildung 5.11.*

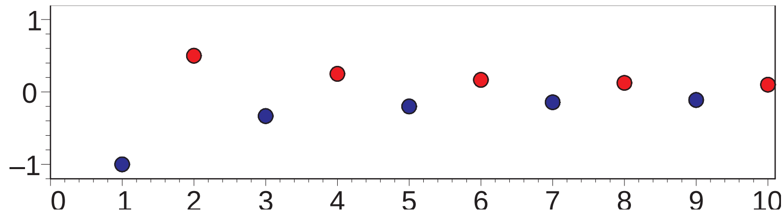


Abbildung 5.11: Eine monoton wachsende und eine monoton fallende Teilfolge

Satz 5.4.32 (Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Jede Folge hat nach Lemma 5.4.30 eine monotone Teilfolge und diese ist nach Satz 5.4.28 konvergent. ■

Beispiel 5.4.33 *Beide Teilfolgen in Beispiel 5.4.31 sind konvergent.*

Corollar 5.4.34 *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.*

Dies ist nicht nur ein theoretisches Resultat, sondern gibt uns auch in der Praxis ein nützliches Konvergenzkriterium, da es oft technisch einfacher ist, zu prüfen, ob eine Folge eine Cauchyfolge ist, als zu beweisen, dass die Folge konvergiert (denn dazu muss man ja schon eine Vermutung für den Grenzwert haben). Beispielsweise wird Corollar 5.4.12 zu einem Kriterium für Konvergenz. Nun zum Beweis von Corollar 5.4.34:

Beweis. Sei (a_n) eine Cauchyfolge. Nach Lemma 5.4.19 ist (a_n) beschränkt. Nach Satz 5.4.32 hat (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_i}). Wir zeigen, dass

$$a := \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N$$

und $n_i \geq N$ mit

$$|a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

also mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

■

Bemerkung 5.4.35 *Ist (a_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = [(a_n)].$$

Beweis. Wir zeigen, dass Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $r = [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ hat. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Somit gilt

$$a_n - a_m - \varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n, m \geq N,$$

also

$$[(a_n - a_m - \varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}] < 0$$

also

$$a_n - r = [(a_n - a_m)_{m\in\mathbb{N}}] < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Analog zeigt man $a_n - r > -\varepsilon$ und erhält

$$|a_n - r| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

■

Bemerkung 5.4.36 *Jede Teilfolge (a_{n_i}) einer konvergenten Folge (a_n) hat denselben Grenzwert, d.h.*

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zu N gibt es ein I mit $n_i \geq N$ für alle $i \geq I$, also $|a_{n_i} - a| < \varepsilon$ für alle $i \geq I$. ∎

5.4.5 Zurück zu Dezimalbrüchen

Satz 5.4.37 *Jede reelle Zahl a lässt sich als unendlicher Dezimalbruch entwickeln, d.h. es gibt einen unendlichen Dezimalbruch (a_n), sodass $[(a_n)] = a$.*

Beweis. Da $\mathbb{R}$ Archimedisch ist, gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ eine größte ganze Zahl $\lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$ mit $\lfloor r \rfloor \leq r$. Durch

$$a_n = \lfloor a \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n}$$

ist ein unendlicher Dezimalbruch gegeben mit

$$|a_n - a| < 10^{-n}$$

Mit Lemma 5.4.9 folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

also mit Bemerkung 5.4.35 und Definition und Satz 5.3.8

$$[(a_n)] = a.$$

∎

5.4.6 Existenz von Quadratwurzeln

Wir zeigen noch, dass jede positive reelle Zahl eine eindeutige positive Quadratwurzel besitzt. Die wesentliche Idee haben wir schon in Beispiel 5.4.15 gesehen. Zum Beweis verwenden wir:

Lemma 5.4.38 *Ist K ein angeordneter Körper, $c \in K$ und (a_n) eine konvergente Folge mit*

$$a_n \geq c$$

für alle n, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq c.$$

Beweis. Angenommen $a = \lim_{n\to\infty} a_n < c$. Dann gibt es ein n mit

$$|a_n - a| < \varepsilon := c - a$$

also

$$a_n \leq a + c - a = c.$$

■

Man kann im Lemma $\geq$ nicht durch $>$ ersetzen: Zum Beispiel ist $a_n = \frac{1}{n} > 0$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Corollar 5.4.39 *Jedes $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$ hat eine eindeutig bestimmte positive Quadratwurzel in $\mathbb{R}$. Für diese schreiben wir $\sqrt{d}$.*

Beweis. Mit dem Verfahren aus Beispiel 5.4.15 mit $f(x) = x^2 - d$ und $a_1 = 0$ und $b_1 = \max\{1, d\}$ (damit $b_1^2 \geq d$) erhält man Cauchyfolgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_n^2 \leq d \leq b_n^2$$

und $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$. Mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ gibt Satz 5.3.17 und Lemma 5.4.38

$$a^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 \leq d \leq \lim_{n\to\infty} b_n^2 = a^2$$

also $a^2 = d$. Ebenso erhalten wir $a \geq 0$, also $a > 0$, denn $a^2 \neq 0$.

Zur Eindeutigkeit: Ist auch $a' > 0$ mit $a'^2 = d$, dann gilt

$$(a + a')(a - a') = a^2 - a'^2 = 0.$$

Da $a, a' > 0$ ist auch $a + a' > 0$ und somit folgt $a = a'$. ■

Beispiel 5.4.40 *Wir haben* $\sqrt{\frac{1}{2}} = [(a_n)] = [(b_n)]$ *wobei wir die Cauchyfolgen* (a_n) *und* (b_n) *analog zu Beispiel 5.4.15 gemäß dem folgenden Schema berechnen können:*

n	a_n	b_n	c	$c^2 - \frac{1}{2}$
1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{7}{64}$
4	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{16}$	$-\frac{7}{256}$
5	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

also etwa

$$0.6875 = \frac{11}{16} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{3}{4} = 0.75.$$

5.5 Übungsaufgaben

Übung 5.1 *Auf der einen Seite einer Waage (Abbildung 5.12) befinden sich* 100 *Lebkuchen und* 10 *Lebkuchen auf der anderen. Die Waage stellt sich waagerecht, wenn die eine Seite höchstens* 1% *schwerer als die andere Seite ist. Wir legen nun schrittweise jeweils auf beiden Seiten* 1 *Lebkuchen hinzu.*

Abbildung 5.12: Waage

1) *Nach wievielen Schritten* n *steht die Waage zum ersten Mal waagerecht?*

2) Sei $a_n = 100 + n$ *und* $b_n = 10 + n$*. Zeigen Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Übung 5.2 *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$a_n = \frac{3n}{2n+1}.$$

1) Bestimmen Sie für $m = 1$, $m = 10$ *und* $m = 100$ *jeweils ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\left|a_n - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{m}$$

für alle $n \geq N$.

2) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$.

Übung 5.3 *Für* $n \in \mathbb{N}$ *definieren wir die Folgen*

$$a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}$$
$$b_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

1) Zeigen Sie: Für $1 \leq n < 1\,000\,000$ *gilt* $a_n > b_n$*, jedoch*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Hinweis: $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$.

2) Visualisieren Sie die beiden Folgen in Maple.

Übung 5.4 *Sei* $F_r \subset \mathbb{Q}$ *die Menge der positiven Fließkommazahlen mit* $r+1$ *Stellen, d.h. die Menge der rationalen Zahlen*

$$s_0.s_1...s_r \cdot 10^k := s_0 \cdot 10^k + s_1 \cdot 10^{k-1} + ... + s_r \cdot 10^{k-r}$$

mit $s_i \in \{0,...,9\}$, $s_0 \neq 0$ *und* $k \in \mathbb{Z}$*. Bei der Fließkomma-Addition berechnet der Computer*

$$F_r \times F_r \to F_r,\ (a,b) \mapsto \mathrm{rd}_r(a+b)$$

wobei wir für $10^k \leq x < 10^{k+1}$ *mit* $\mathrm{rd}_r(x) \in F_r$ *die übliche Rundung*

$$x - 5 \cdot 10^{k-r-1} < \mathrm{rd}_r(x) \leq x + 5 \cdot 10^{k-r-1}$$

von x *auf* $r+1$ *Fließkommastellen bezeichnen.*

1) Bestimmen Sie $\mathrm{rd}_2(5.491)$, $\mathrm{rd}_2(5.495)$ *und* $\mathrm{rd}_2(99.96)$.

2) Zeigen Sie, dass für

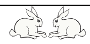
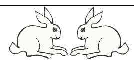
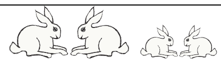
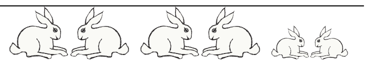
$$a = 1.0002 \cdot 10^{-2} \qquad b = 9.0003 \cdot 10^{-2} \qquad c = 7.0001 \cdot 10^{-2}$$

gilt

$$\mathrm{rd}_4\left(\mathrm{rd}_4\left(a+b\right)+c\right) \neq \mathrm{rd}_4\left(a+\mathrm{rd}_4\left(b+c\right)\right).$$

3) Implementieren Sie die Fließkomma-Addition.

Übung 5.5 *In einem abgeschlossenen Gebiet wird ein Kaninchenpaar ausgesetzt. Jedes Kaninchenpaar, das mindestens 2 Monate alt ist, zeugt jeden Monat ein neues Kaninchenpaar. Sei* f_n *die Anzahl der Kaninchenpaare in der Population im* n*-ten Monat unter der Annahme, dass es keine Todesfälle gibt.*

n	f_n	*Population*
0	0	$\varnothing$
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	

1) Stellen Sie eine Rekursionsgleichung für f_n *auf, und berechnen Sie* $f_0, \ldots, f_{10}$. *Finden Sie den Namen der Folge in der OEIS heraus.*

2) Bestimmen Sie die asymptotische Wachstumsrate der Population, d.h. $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

Übung 5.6 *1) Zeigen Sie, dass die Folge* (a_n), *definiert durch* $a_1 = 1$ *und*

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

konvergiert.

2) Berechnen Sie den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

3) *Zeigen Sie, dass für die Länge d einer Diagonale und die Länge s einer Seite des regelmäßigen Fünfecks (Abbildung 5.13) gilt*

$$\frac{d}{s} = a.$$

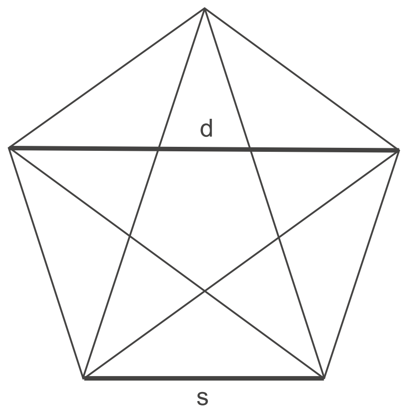


Abbildung 5.13: Seite und Diagonale im Fünfeck

Übung 5.7 *Sei K ein angeordneter Körper und (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in K mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert und*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Übung 5.8 *Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle n.*

1) *Zeigen Sie: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.*

2) *Finden Sie eine Folge (a_n), sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ nicht bestimmt divergent gegen ∞ ist.*

Übung 5.9 1) *Schreiben Sie ein Programm, das für eine positive rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mittels Schulbuchdivision eine Fließkommadarstellung mit $r+1$ Stellen bestimmt, d.h. eine Fließkommazahl*

$$f = s_0.s_1...s_r \cdot 10^k = s_0 \cdot 10^k + s_1 \cdot 10^{k-1} + ... + s_r \cdot 10^{k-r}$$

mit $s_i \in \{0,...,9\}$, $s_0 \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ *und*

$$q - 5 \cdot 10^{k-r-1} < f \leq q + 5 \cdot 10^{k-r-1}.$$

2) *Wenden Sie Ihr Programm für* $r = 100$ *an auf* $q = \frac{2}{7}, \frac{11}{13}, \frac{101}{103}$. *Mit welcher Periode wiederholen sich die Nachkommastellen?*

3) *Berechnen Sie die Fließkommadarstellung von* $\sqrt{2}$ *für* $r = 1000$, *und überprüfen Sie, dass diese Darstellung nicht periodisch ist.*

Übung 5.10 *Sei* $d \in \mathbb{R}$ *mit* $d > 0$ *und* (c_n) *die Folge definiert durch* $c_1 = 1$ *und*

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{d}{c_n})$$

1) *Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass* (c_n) *von unten beschränkt ist durch* $\sqrt{d}$ *und monoton fallend ist.*

2) *Zeigen Sie, dass* $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{d}$.

3) *Implementieren Sie die Berechnung von* $\sqrt{2}$ *mittels der Folge* (c_n) *und dem Algorithmus aus Beispiel 5.4.15. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit anhand der Anzahl der korrekten Nachkommastellen der ersten* 10 *Folgeglieder.*

Übung 5.11 *Es sei* $a_1 = 2$ *und*

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}\frac{2}{a_n^2}$$

für $n \geq 1$.

1) *Bestimmen Sie* $a_2, ..., a_{10}$ *bis auf* 10 *Fließkommastellen.*

2) *Hinweis:* MAPLE-*Funktion* `evalf`.

3) *Zeigen Sie, dass die Folge* (a_n) *konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.*

Übung 5.12 *Zeigen Sie, dass* $\mathbb{R}$ *überabzählbar ist.*

Übung 5.13 *1) Der Erfinder des Schachspiels soll sich eine Belohnung wählen. Er verlangt, dass man ihm auf das erste Feld des Schachbretts ein Weizenkorn, auf das zweite 2, auf das dritte 4, auf das vierte 8 Körner, usw. legen soll (Abbildung 5.14). Wieviele Weizenkörner hätte er erhalten?*

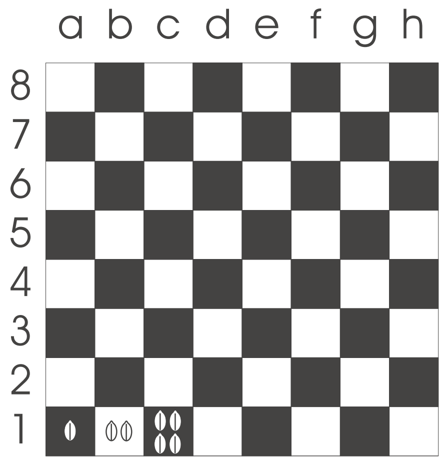


Abbildung 5.14: Schachbrett

2) Sei K ein Körper und $1 \neq \lambda \in K$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}.$$

6

Reihen

6.1 Übersicht

Mit dem unendlichen Dezimalbruch haben wir schon eine Klasse von Folgen (a_n) kennengelernt, bei der man a_n aus a_{n-1} durch Addition einer Konstanten b_n erhält, beispielsweise ist $\sqrt{2}$ dargestellt durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 + \frac{4}{10} \\ a_2 &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Allgemeiner können wir Folgen (a_n) der Form

$$a_n = b_1 + \ldots + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

mit einer gegebenen Folge (b_n) betrachten. Diese bezeichnet man als Reihen. Natürlich lässt sich jede beliebige Folge mittels einer Teleskopsumme in dieser Form schreiben

$$a_n = \underbrace{a_1}_{b_1} + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{b_2} + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{b_3} + \ldots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{b_n}$$

allerdings gibt es Beispiele, bei denen diese Schreibweise eben auf natürliche Weise auftritt, etwa die unendlichen Dezimalbrüche

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{10^k s_i \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^i}_{b_i}$$

mit $s_i \in \{0, \dots, 9\}$.

In einer unendlichen Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl könnte man statt $\frac{1}{10}$ auch andere Zahlen x einsetzen, d.h. Grenzwerte $\sum_{i=1}^{\infty} 10^k s_i \cdot x^i$ betrachten. Allgemeiner erhalten wir für jede gegebene Folge (c_i) eine Abbildung

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i,$$

wobei diese für alle jene x definiert ist, für die der Grenzwert existiert. Unter Verwendung dieser Idee wird in Kapitel 7 eine wesentliche Anwendung von Reihen die Konstruktion von Funktionen sein. Beispielsweise lässt sich die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Cosinusfunktion als Potenzreihe darstellen.

Ein entscheidender Vorteil dieser Darstellung von Funktionen ist die leichte Implementierbarkeit grundlegender Operationen im Computer, etwa der Addition, Multiplikation, Ableitung und Integration. Zum Beispiel addieren wir Funktionen in dieser Darstellung durch die Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (c_i + d_i) \cdot x^i.$$

Für die Multiplikation werden wir in Abschnitt 6.5 das Cauchyprodukt von Reihen entwickeln. In Kapitel 8 diskutieren wir dann die Ableitung von Potenzreihen durch die Formel

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot c_i \cdot x^{i-1}.$$

Zunächst betrachten wir aber Reihen ohne diese x-Abhängigkeit. Oder anders ausgedrückt, die Theorie, die wir jetzt entwickeln, lässt sich später für jedes festgelegte x verwenden.

6.2 Reihen und Konvergenz

Definition 6.2.1 *Sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Die Folge (a_k) mit*

$$a_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$$

heißt ***Reihe*** *der* ***Partialsummen*** *von (b_n) und wird mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

bezeichnet. Im Falle der Konvergenz (oder bestimmten Divergenz) von (a_n) verwenden wir diese Bezeichnung auch für den Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} b_n$$

Wie bei Listen in vielen Programmiersprachen ist es oft nützlich, die Indizierung bei 0 zu beginnen.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist also konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt mit

$$\left| \sum_{n=1}^{k} b_n - a \right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq N.$$

Weglassen von endlich vielen Summanden ändert nichts an der Konvergenzeigenschaft, insbesondere Weglassen der ersten n_0 Summanden, d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent genau dann, wenn $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ konvergent ist.

Beispiel 6.2.2 *Die folgende Reihe konvergiert und wir erhalten sogar den Grenzwert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

denn

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\
&= 1 - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

Siehe auch Übungsaufgabe 6.2.

MAPLE *kann für viele Reihen die Konvergenzfrage entscheiden und den Grenzwert bestimmen, zum Beispiel:*

```
sum(1/(n*(n+1)),n=1..infinity);
```

1

Auch die Partialsumme kann MAPLE *auswerten:*

```
sum(1/(n*(n+1)),n=1..k);
```

$-\frac{1}{k+1} + 1$

Beispiel 6.2.3 *Die* ***harmonische Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert bestimmt gegen ∞*. In* MAPLE *können wir dies überprüfen durch:*

```
sum(1/n,n=1..infinity);
```

∞

Beweis. Durch Kombinieren von jeweils 2^k aufeinanderfolgenden Summanden für $k = 0, 1, ...$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}_{\geq\frac{1}{2}} + \ldots$$

wobei jeweils

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.$$

Somit konvergiert die Reihe bestimmt gegen ∞. ∎

Beispiel 6.2.4 *Neben den unendlichen Dezimalbrüchen, spielen die* ***geometrische Reihe***

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(wobei $x \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist) und die ***Exponentialreihe***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die wichtigste Rolle in der Mathematik, Informatik und Naturwissenschaft. Mittels der geometrischen Reihe kann man beispielsweise periodische unendliche Dezimalbrüche als rationale Zahlen darstellen. Die Exponentialreihe tritt auf bei der Beschreibung von Prozessen, bei denen das Wachstum einer Größe ein Vielfaches der Größe selbst ist (z.B. bei der Vermehrung von Populationen).

6.3 Die geometrische Reihe

Satz 6.3.1 *Für $|x| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Beweis. Nach Lemma 5.4.13 ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}$$

da nach Lemma 5.4.9 für $|x| < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

■

Corollar 6.3.2 *Jeder periodische unendliche Dezimalbruch ist rational.*

Beweis. Eine (ohne Einschränkung positive) periodische Dezimalzahl r lässt sich schreiben als

$$r = t_1 \ldots . t_l \ . \ s_1 \ldots s_r s_1 \ldots s_r \ldots \cdot 10^k$$

mit den nichtperiodischen Dezimalstellen $t_1...t_l$ und der Periode $s_1...s_r$ der Länge r. Nach Subtraktion von $t_1....t_l \cdot 10^k$ können wir annehmen, dass

$$r = 0\ .\ s_1...s_r s_1...s_r... \cdot 10^k$$

Mit

$$p = s_1...s_r \in \mathbb{N}$$

gibt Satz 6.3.1 dann

$$\begin{aligned} r &= \left(p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (10^{-r})^n\right) \cdot 10^k \\ &= \left(p \cdot \left(\frac{1}{1-10^{-r}} - 1\right)\right) \cdot 10^k \\ &= \frac{p \cdot 10^k}{10^r - 1} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

■

Die Rechnung im Beweis lässt sich auch in MAPLE durchführen:

```
p * sum((10)^(-r*n), n=1..infinity) * 10^k;
```

$\frac{p \cdot 10^k}{10^r - 1}$

Beispiel 6.3.3 *Wir haben*

$$0.66... = 6 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = \frac{2}{3}$$

und

$$\begin{aligned} 12.31414... &= 123 \cdot 10^{-1} + 0.1414 \cdot 10^{-1} \\ &= 123 \cdot 10^{-1} + 14 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) \cdot 10^{-1} \\ &= 123 \cdot 10^{-1} + \frac{14}{990} \\ &= \frac{12191}{990}. \end{aligned}$$

Siehe dazu auch Übungsaufgabe 6.1.

6.4 Konvergenz- und Divergenzkriterien

Da eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auch nur eine Folge (a_k) mit $a_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ ist, lässt sich natürlich jedes allgemeine Konvergenzkriterium für Folgen auch auf Reihen anwenden, beispielsweise das Cauchykriterium: Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist (Satz 5.4.34 und Proposition 5.4.6). Für Reihen bedeutet dies:

Satz 6.4.1 (Cauchykriterium für Reihen) *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ist konvergent genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ *ein* N *gibt mit*

$$\left|\sum_{n=l}^{k} b_n\right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq l \geq N.$$

Beweis. Die Folge (a_k) mit

$$a_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$$

ist eine Cauchyfolge genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt mit

$$|a_k - a_{l-1}| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq l \geq N.$$

Weiter ist

$$a_k - a_{l-1} = \sum_{n=l}^{k} b_n.$$

■

Damit erhalten wir eine notwendige Bedingung für Konvergenz, oder anders ausgedrückt, ein Divergenzkriterium:

Corollar 6.4.2 (Nullfolgenkriterium) *Konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, so gilt* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach dem Cauchykriterium 6.4.1 ein N mit

$$\left|\sum_{n=l}^{k} b_n\right| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq l \geq N.$$

Mit $k = l$ gilt somit

$$|b_k| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq N.$$

■

Beispiel 6.4.3 *Nach Corollar 6.4.2 divergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Siehe auch die Übungsaufgaben 6.2 und 6.4.

Aus dem Satz erhalten wir auch das folgende Kriterium, das es erlaubt Konvergenz und Divergenz durch Vergleich mit bekannten Reihen zu beweisen:

Corollar 6.4.4 (Majorantenkriterium) *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent und*

$$|b_n| \leq c_n$$

für alle n, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Beweis. Offenbar sind alle $c_n \geq 0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N mit

$$\left|\sum_{n=l}^{k} b_n\right| \leq \sum_{n=l}^{k} |b_n| \leq \sum_{n=l}^{k} c_n = \left|\sum_{n=l}^{k} c_n\right| < \varepsilon \text{ für alle } l, k \geq N$$

und somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Cauchykriterium 6.4.1 konvergent. ■

Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als eine **konvergente Majorante** von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Verwendet man die Negation des Corollars, d.h. folgert man aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, dann nennt man $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auch eine **divergente Minorante** von $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Zum Majorantenkriterium siehe auch Aufgabe 6.3 und 6.5.

Beispiel 6.4.5 *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1000}$$

ist divergent. Anderenfalls wäre wegen

$$\frac{1}{1001}\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1000}$$

auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1001 \cdot n}$$

konvergent, wegen Satz 5.3.17 angewendet auf das Produkt von Folgen

$$1001 \cdot \left(\sum_{n=l}^{k} \frac{1}{1001 \cdot n} \right) = \sum_{n=l}^{k} \frac{1}{n}$$

also auch die harmonische Reihe. Dies ist im Widerspruch zu Beispiel 6.2.3.

In MAPLE *können wir dies überprüfen durch:*

```
sum(1/(n+1000),n=1..infinity);
```

∞

Beispiel 6.4.6 *Für eine Folge (d_n) mit $|d_n| < 1$ für alle n und $0 < x < 1$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

denn

$$|d_n x^n| \leq x^n$$

und die geometrische Reihe konvergiert nach Satz 6.3.1.

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$.

Aus dem monoton-beschränkt-Kriterium (Satz 5.4.28) erhalten wir direkt:

Satz 6.4.7 (Monoton und beschränkt) *Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n \geq 0$ für alle n konvergiert genau dann, wenn die Folge $\sum_{n=1}^{k} b_n$ von oben beschränkt ist.*

Beweis. Die Folge der Partialsumme $a_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ ist von oben beschränkt und monoton wachsend, denn alle $b_n \geq 0$. ■

Corollar 6.4.8 *Für $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Beweis. Nach Satz 6.4.7 müssen wir nur zeigen, dass die Partialsummenfolge $a_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$ von oben beschränkt ist: Zu jedem k gibt es ein w mit $k \leq 2^w - 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} a_k \leq a_{2^w-1} &= \sum_{i=1}^{w} \sum_{n=2^{(i-1)}}^{2^i-1} \frac{1}{n^s} \\ &\leq \sum_{i=1}^{w} 2^{i-1} \frac{1}{2^{(i-1)s}} \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(i-1)}} \right)^s = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \end{aligned}$$

mit Satz 6.3.1 zur geometrischen Reihe. ■

Beispiel 6.4.9 *Den Grenzwert kann man nicht so leicht bestimmen,* Maple *kennt zum Beispiel:*

```
sum(1/n^2,n=1..infinity);
```

$\frac{\pi^2}{6}$

Auf den Beweis dieser Formel (mit Hilfe von Fourierreihen) können wir hier nicht eingehen.

Aus Corollar 5.4.12 angewendet auf die Partialsummenfolge erhalten wir:

Satz 6.4.10 (Quotientenkriterium) *Sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Reihe mit $b_n \neq 0$ für alle n. Gibt es ein $0 < \lambda < 1$ mit*

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq \lambda \text{ für alle } n$$

dann ist die Reihe konvergent.

Beweis. Für die Partialsummenfolge $a_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = |b_{n+1}| \leq \lambda |b_{n+1}| = \lambda |a_n - a_{n-1}|$$

also ist (a_k) nach Corollar 5.4.12 eine Cauchyfolge. ■

Beispiel 6.4.11 *Der Satz ist falsch für $\lambda = 1$, beispielsweise gilt für $b_n = \frac{1}{n}$, dass*

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{n}{n+1} \leq 1 \textit{ für alle } n,$$

aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht.

Beispiel 6.4.12 *Nach Corollar 6.4.8 ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, aber das Quotientenkriterium ist nicht anwendbar, denn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Beispiel 6.4.13 *Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Es ist*

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^2 \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3})^2 = \frac{8}{9}$$

für alle $n \geq 3$ und somit ist $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent. Da die Änderung endlich vieler Summanden für die Konvergenz keine Rolle spielt, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent.

Siehe auch Übungsaufgabe 6.4.

Corollar 6.4.14 *Die **Exponentialreihe***

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Beweis. Da $\mathbb{R}$ Archimedisch ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2|x|$. Dann ist

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ für alle } n \geq N$$

also konvergiert mit dem Quotientenkriterium die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Da die Änderung endlich vieler Summanden für die Konvergenz keine Rolle spielt, konvergiert auch die Exponentialreihe. ∎

Abschliessend zeigen wir noch ein Kriterium, für das wir noch keine Entsprechung in der Sprache der Folgen kennengelernt haben:

Satz 6.4.15 (Leibnizkriterium) *Ist (c_n) eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$$

Beweis. Da (c_n) monoton fallend ist gilt für die Partialsummenfolge $a_k = \sum_{n=1}^{k}(-1)^n c_n$, dass

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & \leq & a_3 & \leq & a_5 & \leq & \ldots \\ \leq & & \leq & & \leq & & \\ a_2 & \geq & a_4 & \geq & a_6 & \geq & \ldots \end{array}$$

Somit ist (a_{2k}) monoton fallend und von unten beschränkt durch a_1. Ebenso ist (a_{2k+1}) monoton steigend und von oben beschränkt durch a_2. Mit Satz 5.4.28 sind also beide Folgen konvergent, und

$$\lim_{k\to\infty}(a_{2k} - a_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} c_{2k+1} = 0.$$

Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also N_1 und N_2 mit

$$\begin{aligned} |a_{2k} - a| &< \varepsilon \text{ für alle } k \geq N_1 \\ |a_{2k+1} - a| &< \varepsilon \text{ für alle } k \geq N_2 \end{aligned}$$

also

$$|a_k - a| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

d.h. (a_k) ist konvergent. ■

Beispiel 6.4.16 *Die* ***alternierende harmonische Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergiert. In Maple *können wir berechnen:*

```
sum((-1)^n/n,n=1..infinity);
```

$-\ln(2)$

Der Grenzwert lässt sich mit Hilfe der ***Logarithmusreihe***

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

schreiben, die für $0 < x \leq 2$ konvergiert. Die Konvergenz folgt für $0 < x < 2$ mit der geometrischen Reihe als konvergente Majorante, und für $x = 2$, wie gerade gesehen, mit dem Leibnizkriterium. Für $x = 0$ erhalten wir die Reihe $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die nach Beispiel 6.2.3 über die harmonische Reihe divergiert.

Zum Leibnizkriterium siehe auch Übungsaufgabe 6.4.

6.5 Absolute Konvergenz

Kann man Reihen addieren und multiplizieren? Die Addition und Multiplikation mit einer Konstanten ist einfach:

Bemerkung 6.5.1 *Sind $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + c_n)$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda b_n)$ konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 5.3.17 angewendet auf die Partialsummenfolgen. ■

Was ist aber mit dem Produkt? Ebenso aus Satz 5.3.17 erhalten wir, dass die Folge

$$g_r = \left(\sum_{n=0}^{r} b_n\right)\left(\sum_{m=0}^{r} c_m\right)$$

konvergiert und diese Folge gegen das Produkt der Grenzwerte konvergiert. Um das Produkt als Reihe, d.h. als Folge von Partialsummen zu schreiben, müssen wir eine Sortierung der Summanden $b_n c_m$ wählen. Der Grenzwert hängt leider im Allgemeinen von der Sortierung ab. Wie wir in Beispiel 6.5.3 sehen werden, kann es sogar passieren, dass eine Sortierung der Summanden als Reihe konvergiert und eine andere Sortierung nicht. Unter einer stärkeren Voraussetzung kann man allerdings zeigen, dass die Sortierung für Konvergenz und Grenzwert keine Rolle spielt. Üblicherweise sortiert man die Summanden $b_n c_m$ dann nach $n + m$:

Definition 6.5.2 *Das **Cauchyprodukt** von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k$$

*mit der **Diagonalsumme***

$$d_k = \sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}.$$

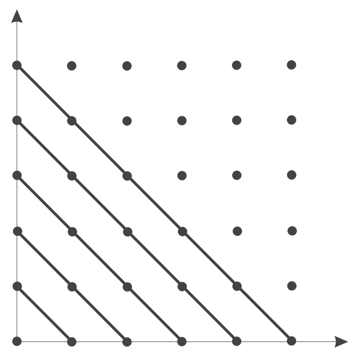


Abbildung 6.1: Diagonalsumme

Siehe dazu Abbildung 6.1. Wann aber konvergiert das Cauchyprodukt? Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ reicht dazu leider nicht:

Beispiel 6.5.3 *Nach dem Leibnizkriterium 6.4.15 konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

*aber das **Cauchyquadrat** (d.h. das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst) divergiert.*

Beweis. Mit $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ist die Diagonalsumme im Cauchyprodukt

$$\begin{aligned} d_k = \sum_{n=0}^{k} b_n b_{k-n} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \frac{(-1)^{k-n}}{\sqrt{k-n+1}} \\ &= (-1)^k \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(k-n+1)}} \end{aligned}$$

Für alle $x, y \geq 0$ gilt die **Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel**

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

denn $\frac{1}{4}(x+y)^2 - xy = \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq 0$.

Damit erhalten wir

$$|d_k| \geq \sum_{n=0}^{k} \frac{2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \geq 1.$$

Somit ist d_k keine Nullfolge, also ist nach Satz 6.4.2 die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ nicht konvergent. ■

Definition 6.5.4 *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$$

konvergent ist.

Proposition 6.5.5 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Mit der Dreiecksungleichung ist

$$\left| \sum_{n=l}^{k} b_n \right| \leq \sum_{n=l}^{k} |b_n|,$$

das Cauchykriterium 6.4.1 liefert also die Behauptung. ■

Beispiel 6.5.6 *Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist nach dem Leibnizkriterium 6.4.15 konvergent, nach Beispiel 6.2.3 aber nicht absolut konvergent.*

Beispiel 6.5.7 *Die geometrische Reihe ist absolut konvergent für $|x| < 1$, denn*

$$\sum_{n=0}^{k} |x|^n = \frac{1 - |x|^{k+1}}{1 - |x|}$$

konvergiert für $k \to \infty$ nach Lemma 5.4.9.

Corollar 6.5.8 *Jede Reihe, die das Majorantenkriterium erfüllt, ist absolut konvergent.*

Beweis. Folgt sofort aus dem Beweis von Satz 6.4.4, da wir dort $\sum_{n=l}^{k} |b_n|$ abgeschätzt hatten. ∎

Corollar 6.5.9 *Jede Reihe, die das Quotientenkriterium erfüllt ist absolut konvergent.*

Beweis. Gilt für $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, dass

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| \leq \lambda \text{ für alle } n$$

erhalten wir

$$|b_{n+1}| \leq |b_1| \lambda^n$$

also ist $|b_1| \cdot \sum_{n=1}^{k} \lambda^n$ eine konvergente Majorante. ∎

Insbesondere folgt das Quotientenkriterium aus dem Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe als Majorante.

Beispiel 6.5.10 *Die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent, da sie nach Corollar 6.4.14 das Quotientenkriterium erfüllt.

Satz 6.5.11 (Cauchyprodukt) *Sind $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ absolut konvergent, dann ist das Cauchyprodukt absolut konvergent und*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m \right).$$

Beweis. Sei

$$b_r = \sum_{k=0}^{r} \sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n} = \sum_{n+m \leq r} b_n c_m$$
$$g_r = \left(\sum_{n=0}^{r} b_n\right) \left(\sum_{m=0}^{r} c_m\right)$$

siehe dazu Abbildung 6.2. Nach Definition ist

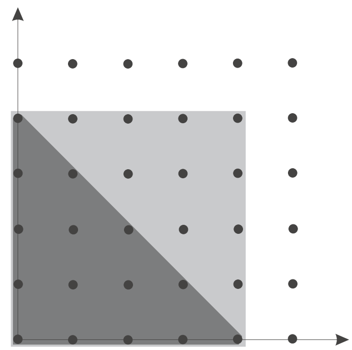


Abbildung 6.2: Summanden der Folgen (b_r) und (g_r).

$$\lim_{r\to\infty} b_r = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}\right)$$

das Cauchyprodukt, und nach Satz 5.3.17 gilt

$$\lim_{r\to\infty} g_r = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{r\to\infty} b_r = \lim_{r\to\infty} g_r.$$

Man beachte, dass $b_r = g_r$ im Allgemeinen nicht gilt.

Da nach Voraussetzung $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ konvergent sind, konvergiert nach Satz 5.3.17 auch die Produktfolge

$$\widetilde{g}_r = \left(\sum_{n=0}^{r}|b_n|\right)\left(\sum_{m=0}^{r}|c_m|\right).$$

Mit

$$\widetilde{b}_r = \sum_{n+m\leq r}|b_n|\,|c_m|$$

gilt

$$\widetilde{b}_r \leq \widetilde{g}_r \leq \lim_{r\to\infty}\widetilde{g}_r$$

Somit ist $\widetilde{b}_r$ monoton wachsend und von oben beschränkt, nach Satz 5.4.28 also konvergent. Da mit der Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}\right| \leq \widetilde{b}_r,$$

ist die Cauchyproduktreihe $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} b_n c_{k-n}\right)$ nach dem Majorantenkriterium (Corollar 6.5.8) absolut konvergent.

Mit Satz 5.4.36 und Lemma 5.4.38 angewendet auf

$$\widetilde{g}_r \le \widetilde{b}_{2r} \le \widetilde{g}_{2r}$$

(siehe Abbildung 6.3) folgt

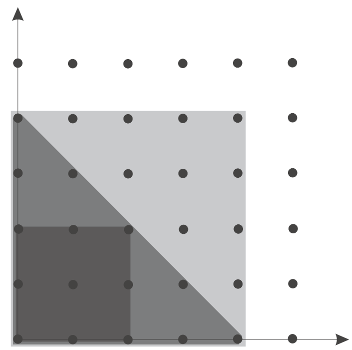


Abbildung 6.3: Die Folgen $(\widetilde{g}_r)$, $(\widetilde{b}_{2r})$ und $(\widetilde{g}_{2r})$.

$$\begin{array}{ccccc}
\lim_{r\to\infty}\widetilde{g}_r & \le & \lim_{r\to\infty}\widetilde{b}_{2r} & \le & \lim_{r\to\infty}\widetilde{g}_{2r} \\
 & & \| & & \| \\
 & & \lim_{r\to\infty}\widetilde{b}_r & & \lim_{r\to\infty}\widetilde{g}_r
\end{array}$$

also

$$\lim_{r\to\infty}\widetilde{g}_r = \lim_{r\to\infty}\widetilde{b}_r.$$

Da mit der Dreiecksungleichung

$$|g_r - b_r| \le \widetilde{g}_r - \widetilde{b}_r$$

folgt

$$\lim_{r\to\infty} g_r = \lim_{r\to\infty} b_r.$$

■

Siehe dazu auch Übung 6.6.

Allgemeiner kann man zeigen: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent sind, ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha_1(k)} c_{\alpha_2(k)}$ für jede bijektive Abbildung $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\alpha_1(k), \alpha_2(k))$ absolut konvergent, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha_1(k)} c_{\alpha_2(k)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right)$$

Statt der Sortierung der Summanden im Cauchyprodukt kann man also auch jede andere Sortierung wählen. Man kann auch zeigen, dass es, falls $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, zu jedem $r \in \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt mit $\sum_{k=0}^{\infty} b_{\alpha(n)} = r$. Durch Umsortieren erhält man also jede beliebige reelle Zahl.

Mittels des Cauchyprodukts folgt direkt die **Funktionalgleichung der Exponentialfunktion**:

Corollar 6.5.12 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis. Nach Beispiel 6.5.10 ist die Exponentialreihe absolut konvergent. Mit dem Binomialsatz 4.2.20 ist die Diagonalsumme

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} \\ &= \frac{1}{k!} (x+y)^k \end{aligned}$$

Somit liefert Satz 6.5.11 die Behauptung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m \right)$$

■

6.6 Übungsaufgaben

Übung 6.1 *Bestimmen Sie die rationalen Zahlen, die durch die folgenden unendlichen periodischen Dezimalbrüche dargestellt werden:*

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.44... \\ r_2 &= 0.1212... \\ r_3 &= 0.0369369... \\ r_4 &= 0.846153846153... \end{aligned}$$

Übung 6.2 *Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert:*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n} + 3^{-n}\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

Übung 6.3 *1) Zeigen Sie: Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen in* $\mathbb{R}_{>0}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}_{>0}$$

dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert}$$

Welche Implikation gilt für $c = 0$*?*

Hinweis: Majorantenkriterium.

2) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}-2\right)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}-2\right)^2}{n^3+\sqrt{n^4+1}}$$

Übung 6.4 *Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3-2n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

Übung 6.5 *Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz, und berechnen Sie im Falle von Konvergenz den Grenzwert:*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+k}$

2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+2}$

Übung 6.6 *Bestimmen Sie, für welche* $x \in \mathbb{R}$ *die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

konvergiert und geben Sie den Grenzwert als Funktion von x *an.*

Hinweis: Schreiben Sie die Reihe als Quadrat einer anderen Reihe.

Übung 6.7 1) *Sei* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$ *absolut konvergent ist.*

2) *Geben Sie ein Gegenbeispiel für diese Aussage, falls* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.*

3) *Zeigen Sie, dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n} \frac{3^n}{4^n}$$

absolut konvergent ist.

7

Funktionen

7.1 Übersicht

Gegeben sei eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

und $a < b$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Lässt sich der Graph von f ohne Absetzen des Stifts zeichnen (d.h. f ist stetig), so sollte es eine **Nullstelle** $a \leq z \leq b$ von f geben, d.h. ein z mit $f(z) = 0$. Warum ist das so und wie findet man ein solches z theoretisch oder praktisch mit dem Computer? Wir konstruieren z mittels **Intervallhalbierung**: Sei

$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$

Wir konstruieren Folgen (a_n) und (b_n) induktiv (siehe dazu Abbildung 5.9). Sind a_n und b_n konstruiert, sei

$$c = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Falls $f(c) = 0$ haben wir eine Nullstelle gefunden und stoppen. Anderenfalls setze

$$a_{n+1} = c \qquad b_{n+1} = b_n \qquad \text{falls } f(c) < 0$$

und

$$a_{n+1} = a_n \qquad b_{n+1} = c \qquad \text{falls } f(c) > 0.$$

Damit erhalten wir eine monoton wachsende Folge (a_n) die von oben durch b beschränkt ist, und eine monoton fallende Folge (b_n) die von unten durch a beschränkt ist, denn

$$a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b.$$

Nach Satz 5.4.28 sind (a_n) und (b_n) also konvergent. Wegen

$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b-a)$$

und Lemma 5.4.38 gilt

$$a \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \leq b.$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Schreibe

$$z := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Angenommen für jede konvergente Folge (x_n) gilt

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Diese Eigenschaft bezeichnen wir auch als **Stetigkeit** von f. Dann ist

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(z) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$$

also

$$f(z) = 0.$$

Damit haben wir bewiesen, dass eine stetige Funktion f mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ eine Nullstelle $a < z < b$ hat. Außerdem erhalten wir einen Algorithmus, der die Nullstelle z als Grenzwert einer Folge beschreibt. Siehe auch Übung 7.1.

Dieselbe Idee wurde schon in Beispiel 5.4.15 und in Corollar 5.4.39 verwendet. Den Stetigkeitsbegriff haben wir dort für $f(x) = x^2$ nur implizit verwendet, indem wir mittels Satz 5.3.17 gefolgert haben, dass

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2.$$

7.2 Definition und Beispiele

Definition 7.2.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* ***Funktion****.*

Der ***Graph*** *von f ist*

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

In der Praxis kommen oft Mengen D der folgenden Form vor:

Definition 7.2.2 *Teilmengen von der Form*

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \end{array}$$

mit $a < b$ bezeichnen wir als ***Intervall****. Wir schreiben auch*

$$\begin{array}{rcl} [a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \\ ]\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \\ ]a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{array}$$

Siehe dazu Abbildung 7.1.

Beispiel 7.2.3 *Jedes Polynom*

$$f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$$

gibt durch Einsetzen (siehe Bemerkung 4.2.17) eine ***Polynomfunktion***

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

die wir mit demselben Symbol f bezeichnen. Der ***Grad*** *der Polynomfunktion ist der Grad des definierenden Polynoms.*

Beispielsweise liefert $f = X^2 - 2$ die Parabelfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$, für den Graphen von f siehe Abbildung 7.2. Das Polynom $f = X^3 - X$ gibt Abbildung 7.3. In Aufgabe 7.1 suchen wir eine Nullstelle einer Polynomfunktion vom Grad 5 (Abbildung 7.12).

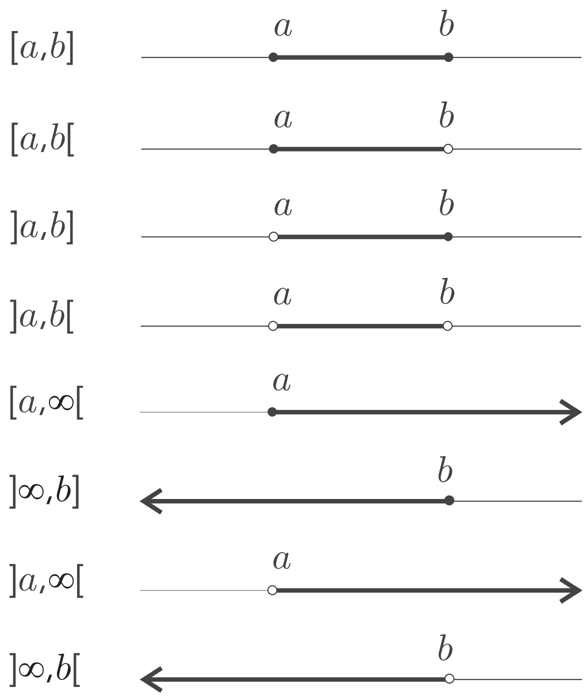


Abbildung 7.1: Intervalle

Beispiel 7.2.4 *Nach Satz 6.4.14 erhalten wir die **Exponentialfunktion***

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{array}$$

siehe Abbildung 7.4.

Beispiel 7.2.5 *Nach Beispiel 6.4.16 erhalten wir aus der Logarithmusreihe eine Funktion*

$$\begin{array}{ccc}]0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \end{array}$$

siehe Abbildung 7.5. Wir werden zeigen, dass sich diese auf ganz $]0,\infty[$ *zu der Logarithmusfunktion*

$$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$$

fortsetzt.

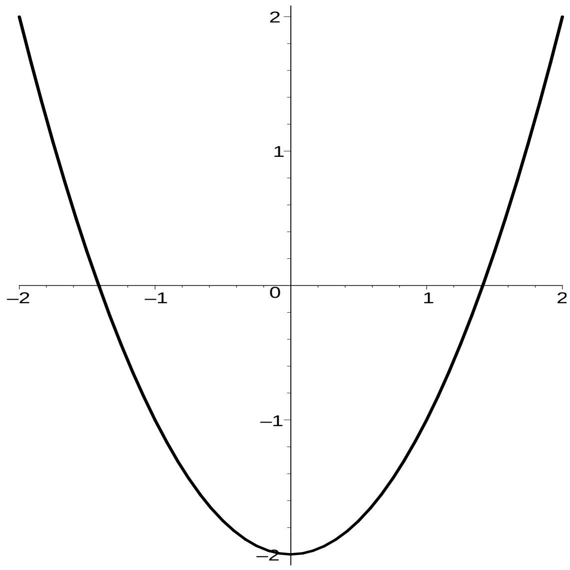


Abbildung 7.2: Parabelfunktion

Beispiel 7.2.6 *Corollar 5.4.39 liefert die **Quadratwurzelfunktion***

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{}: & [0,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

siehe Abbildung 7.6.

Beispiel 7.2.7 *Sind $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ Polynome, dann erhalten wir die rationale Funktion*

$$\begin{array}{rccc} \frac{p}{q}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

wobei

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}.$$

Für

$$\frac{p}{q} = \frac{X^2+1}{X^2-1}$$

ist beispielsweise

$$D = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$$

siehe Abbildung 7.7.

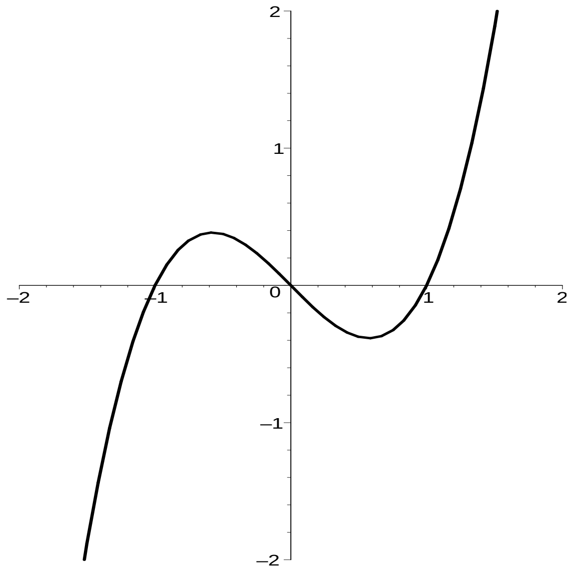


Abbildung 7.3: Eine Polynomfunktion vom Grad 3

Beispiel 7.2.8 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $E \subset D$, so ist die* ***Einschränkung*** *$f\,|_E \colon E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ wieder eine Funktion.*

Beispiel 7.2.9 *Die durch die geometrische Reihe definierte Funktion*

$$g: \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{array}$$

ist eine rationale Funktion, denn nach Satz 6.3.1 gilt

$$g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Siehe dazu Abbildung 7.8.

7.3 Stetigkeit und Zwischenwertsatz

Notation 7.3.1 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$. Gilt für jede Folge (x_n) in D mit*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

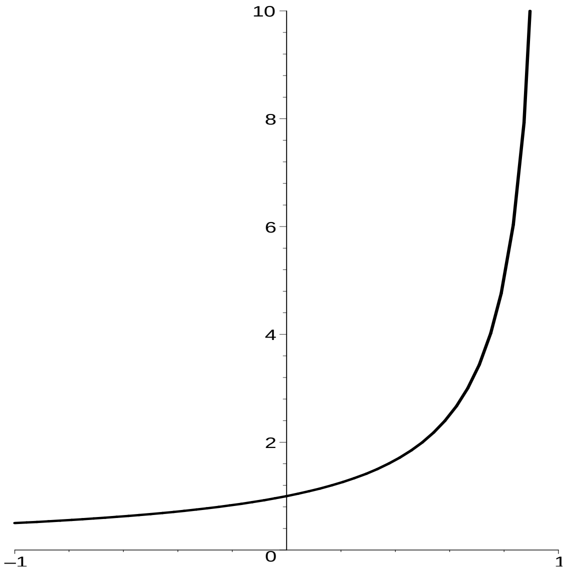


Abbildung 7.4: Exponentialfunktion

dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

dann schreibe

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Betrachten wir nur Folgen mit $x_n < a$ *so schreiben wir*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = c$$

analog für $>$ *und* $\neq$.

Wir verwenden die Notation auch allgemeiner für $a \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir noch voraus, dass es überhaupt eine Folge (x_n) in D gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Falls $a \in D$ ist, gibt es immer eine solche Folge, nämlich die konstante Folge $x_n = a$. Weiter verwenden wir die Notation auch für $a = \pm\infty$ und $c = \pm\infty$.

Beispiel 7.3.2 *Für die rationale Funktion*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

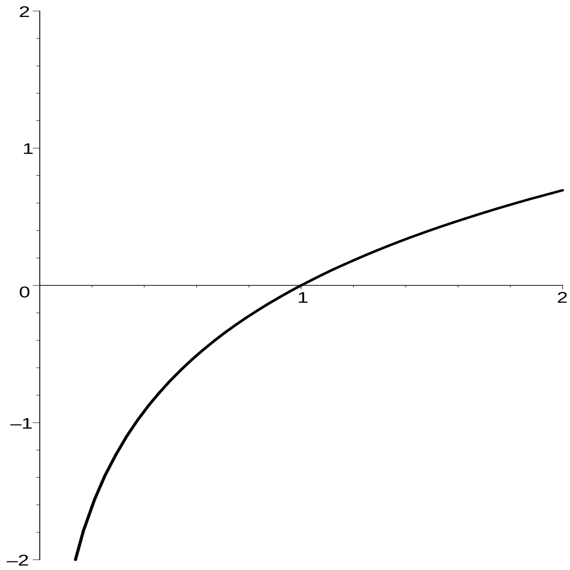


Abbildung 7.5: Logarithmusfunktion

aus Beispiel 7.2.7 gilt z.B.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty,$$

da für $x < 1$ nahe bei 1 der Nenner $x^2 - 1 < 0$ ist und sich 0 annähert, während der Zähler ≥ 1 ist.

Man kann die Aussage aber auch etwas formaler zeigen: Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n < 1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Dann gilt für den Nenner $\lim_{n\to\infty}(x_n^2 - 1) = 0$ und für den Zähler $\lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 1) = 1$, also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1}\right| = \infty.$$

Weiter gibt es ein N mit $|x_n - 1| < 1$, also $x_n^2 - 1 < 0$, also $\frac{x_n^2+1}{x_n^2-1} < 0$ für alle $n \geq N$. Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 1} = -\infty.$$

Definition 7.3.3 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in $a \in D$, wenn*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

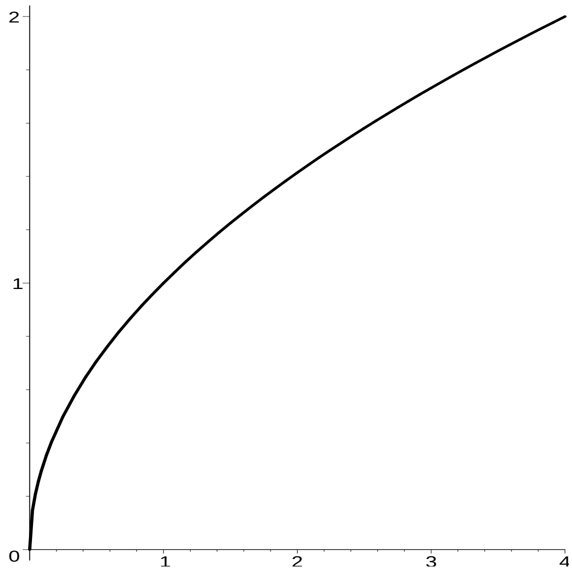


Abbildung 7.6: Quadratwurzelfunktion

Weiter heißt f stetig, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Nach Definition ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ also stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Die Funktion ist stetig, wenn diese Gleichung für jede konvergente Folge (x_n) in D mit Grenzwert in D gilt.

Beispiel 7.3.4 *Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind stetig. Dies folgt aus:*

Satz 7.3.5 *Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetig, so auch*

$$f + g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$$

und

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch

$$\frac{1}{f} : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

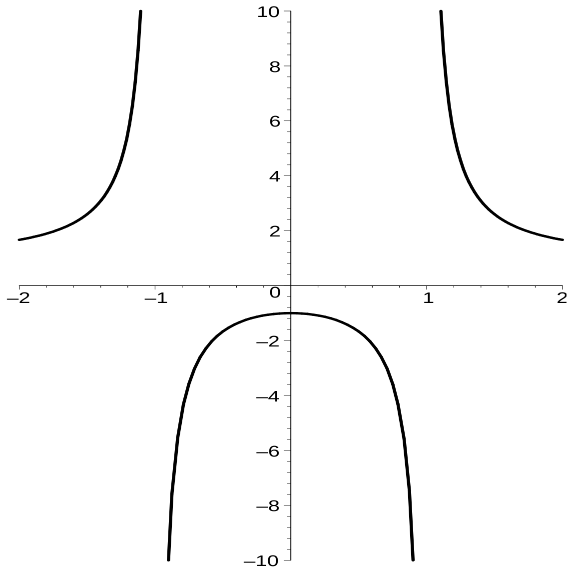


Abbildung 7.7: Rationale Funktion

Sind $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(D) \subset E$*, dann ist auch die Komposition*

$$g \circ f : D \to \mathbb{R}, \; x \mapsto g(f(x))$$

stetig.

Beweis. Für jede konvergente Folge (x_n) mit Grenzwert in D gilt

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

ebenso für g. Somit gilt mit Satz 5.3.17

$$\begin{aligned}(f+g)(\lim_{n\to\infty} x_n) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) + g(\lim_{n\to\infty} x_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n)\end{aligned}$$

Ebenso zeigt man die Aussage für das Produkt, das Inverse und die Komposition. ∎

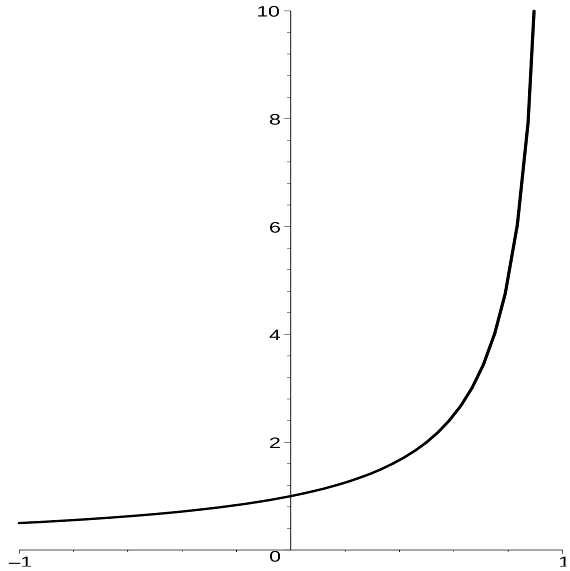


Abbildung 7.8: Geometrische Reihe

Beispiel 7.3.6 *Die Exponentialfunktion ist stetig.*

Beweis. Wir zeigen Stetigkeit in $a \in \mathbb{R}$. Mit der Funktionalgleichung (Corollar 6.5.12) erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\exp(x) &= \lim_{x\to a}(\exp(a)\cdot\exp(x-a))\\ &= \exp(a)\cdot\lim_{x\to a}\exp(x-a)\\ &= \exp(a)\cdot\lim_{x\to 0}\exp(x)\\ &= \exp(a)\end{aligned}$$

mit dem folgenden Lemma: ■

Lemma 7.3.7 $\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1$.

Beweis. Für alle $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}|\exp(x)-1| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}|x|^n = |x|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}|x|^{n-1}\\ &\le |x|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\cdot|x|\end{aligned}$$

mit der Dreiecksungleichung angewendet auf die Partialsummen, Satz 6.3.1 über die geometrische Reihe und $\frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sei (x_m) eine beliebige Folge mit $\lim_{m\to\infty} x_m = 0$. Es gibt also ein M mit $|x_m| < 1$ und somit

$$|\exp(x_m) - 1| \leq 2 \cdot |x_m|$$

für alle $m \geq M$. Also gilt $\lim_{m\to\infty} \exp(x_m) = 1$. ■

Wie im einleitenden Abschnitt 7.1 schon gezeigt, gilt für stetige Funktionen:

Satz 7.3.8 (Nullstellensatz) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$, dann hat f eine Nullstelle (ebenso falls $f(a) > 0 > f(b)$).*

Beispiel 7.3.9 *Für die Parabelfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$ in Abbildung 7.2 ist der Satz anwendbar mit $[a,b] = [0,2]$, ebenso für die rationale Funktion*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x} \end{array}$$

(Abbildung 7.9), indem wir diese z.B. auf das Intervall $[a,b] = [\frac{1}{2}, 2]$ einschränken.

Beispiel 7.3.10 *Auf die rationale Funktion*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^2+1}{x^2-1} \end{array}$$

lässt sich der Satz nicht anwenden, denn es gibt kein Intervall

$$[a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, siehe Abbildung 7.7. Die Funktion hat aber auch keine Nullstelle.

*Ebenso können wir den Satz nicht anwenden auf die Parabelfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Diese hat zwar eine Nullstelle in $x = 0$, wechselt aber nicht das Vorzeichen. Wir können diese Nullstelle also nicht mit der Intervallhalbierungsmethode finden. Das **Newtonverfahren**, das wir in Aufgabe 8.7 kennenlernen werden, ist dagegen anwendbar.*

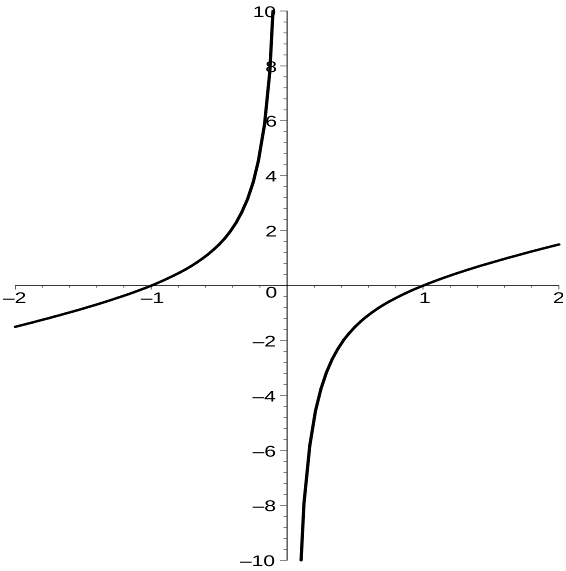


Abbildung 7.9: Rationale Funktion mit 2 Nullstellen

Aus dem Nullstellensatz folgt sofort der noch etwas allgemeinere Zwischenwertsatz:

Corollar 7.3.11 (Zwischenwertsatz) *Eine stetige Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *nimmt jeden Wert zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

Beweis. Sei $f(a) < y_0 < f(b)$ oder $f(a) > y_0 > f(b)$. Wende den Nullstellensatz an auf $g(x) = f(x) - y_0$. Somit gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = 0$ d.h. $f(x_0) = y_0$. ∎

7.4 Potenzreihen

Im letzten Abschnitt haben wir schon gesehen, dass man Funktionen durch eine Reihenentwicklung definieren kann, z.B. die Exponentialfunktion. Dies wollen wir hier noch etwas genauer untersuchen. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, besitzen Potenzreihen die sehr nützliche Eigenschaft, dass man sie in ihrem Konvergenzbereich gliedweise ableiten kann.

Definition 7.4.1 *Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_n, x \in \mathbb{R}$.

Lemma 7.4.2 *Ist* $P(x_0)$ *konvergent, dann ist* $P(x)$ *konvergent für alle* $|x| < |x_0|$.

Beweis. Nach Corollar 6.4.2 ist $a_n x_0^n$ eine Nullfolge, also gibt es nach Lemma 5.3.21 ein $C > 0$ mit $|a_n x_0^n| \leq C$ für alle n. Wegen

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq C \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

ist $P(x)$ nach dem Majorantenkriterium (Corollar 6.4.4) absolut konvergent, denn $C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ist nach Satz 6.3.1 über die geometrische Reihe konvergent. ∎

Definition 7.4.3 *Der* ***Konvergenzradius*** *von* P *ist*

$$r(P) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \text{ konvergiert}\}.$$

Nach dem Lemma ist $r(P) \geq 0$, wobei auch $r(P) = \infty$ möglich ist.

Corollar 7.4.4 *Eine Potenzreihe* $P(x)$ *konvergiert absolut für alle* x *mit* $|x| < r(P)$ *und divergiert für alle* x *mit* $|x| > r(P)$.

Beweis. Für $|x| < r(P)$ gibt es nach der Definition des Supremums ein r mit $|x| < r < r(P)$ und $P(r)$ konvergent, also ist nach Lemma 7.4.2 $P(x)$ absolut konvergent.

Wäre $P(x)$ für $|x| > r(P)$ konvergent, dann gäbe es nach dem Lemma ein r mit $|x| > r > r(P)$ und $P(r)$ konvergent, also $r(P) \geq r$, ein Widerspruch. ∎

Wie wir gleich anhand von Beispielen sehen werden, kann man für $|x| = r(P)$ keine allgemeine Aussage machen.

Nach Corollar 7.4.4 liefert jede Potenzreihe $P(x)$ eine Funktion

$$\begin{array}{rccc} P: &]-r(P), r(P)[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(x) \end{array}$$

Beispiel 7.4.5 *Die geometrische Reihe*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

hat Konvergenzradius

$$r(P) = 1,$$

denn nach Satz 6.3.1 konvergiert sie für $|x| < 1$ und divergiert für $x = 1$ (nach dem Nullfolgenkriterium Corollar 6.4.2). Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

*könnte man meinen, dass die Reihe vielleicht für alle $x \neq 1$ konvergiert. Corollar 7.4.4 zeigt, dass die **Polstelle** bei $x = 1$ Konvergenz für $x > 1$ und, erstaunlicherweise, auch symmetrisch für $x < -1$ verhindert.*

Oft ist es nützlich den Nullpunkt in $x_0 \in \mathbb{R}$ zu verschieben. Dies erlaubt es uns, z.B. die Logarithmusreihe aus Beispiel 6.4.16 als Potenzreihe aufzufassen:

Bemerkung 7.4.6 *Eine Reihe $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ bezeichnen wir als **Potenzreihe im Entwicklungspunkt x_0** und wir setzen $r(Q) = r(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$, denn $Q(x)$ konvergiert im Konvergenzradius $r(Q)$ um x_0. Damit erhalten wir eine Funktion*

$$\begin{array}{rccc} Q: &]x_0 - r(P), x_0 + r(P)[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \end{array}$$

Beispiel 7.4.7 *Wie wir schon in Beispiel 6.4.16 gezeigt haben, konvergiert die Logarithmusreihe*

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

für $0 < x \leq 2$ und divergiert für $x = 0$ (harmonische Reihe), wegen $x_0 = 1$ ist also

$$r(\ln) = 1.$$

Die beiden Beispiele zeigen, dass man den Konvergenzradius einer Potenzreihe in konkreten Fällen oft durch Konvergenzbetrachtungen für Reihen bestimmen kann. Der folgende Satz gibt mit Hilfe des Quotientenkriteriums eine allgemeine Formel:

Satz 7.4.8 *Sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle n. Dann gilt*

$$r(P) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

falls der Grenzwert existiert (im Sinne von Konvergenz oder uneigentlicher Divergenz, wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ setzen).

Beweis. Nach dem Quotientenkriterium 6.4.10 ist $P(x)$ für

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

konvergent, denn dann gibt es ein N und $\lambda < 1$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \lambda \text{ für alle } n \geq N.$$

Ist andererseits

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

dann gibt es ein N und $\lambda > 1$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \lambda \text{ für alle } n \geq N,$$

und somit ist $a_n x^n$ keine Nullfolge. ∎

Beispiel 7.4.9 *Der Konvergenzradius der Exponentialreihe*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

ist

$$r(\exp) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Für weitere Beispiele siehe auch Aufgabe 7.3.

Beispiel 7.4.10 *Für die* ***Cosinusreihe***

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

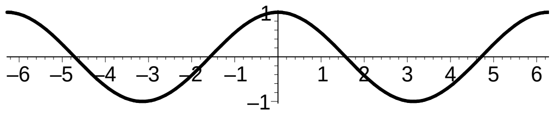


Abbildung 7.10: Cosinus

ist

$$r(\cos) = \infty,$$

also erhalten wir die Cosinusfunktion

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

siehe Abbildung 7.10.

Beweis. Für die Reihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

ist

$$r(P) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2n+2} \right|} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Somit konvergiert $P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit auch $\cos(x) = P(x^2)$. ■

Beispiel 7.4.11 *Ebenso zeigt man $r(\sin) = \infty$ für die **Sinusreihe***

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

und erhält die Sinusfunktion

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

siehe Abbildung 7.11.

Bemerkung 7.4.12 *Die Reihen* exp, cos *und* sin *kann man auch für $x \in \mathbb{C}$ als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definieren. Dabei bezeichnet*

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i$$

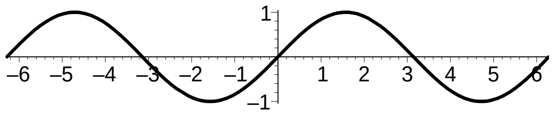


Abbildung 7.11: Sinus

*den Körper der **komplexen Zahlen** mit der Rechenregel* $i^2 = -1$. *Aus der Reihenentwicklung folgt direkt, dass*

$$\exp(i \cdot x) = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Somit erhalten wir mit Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Corollar 6.5.12)

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &= \exp(i \cdot (x+y)) \\ &= \exp(i \cdot x) \cdot \exp(i \cdot y) \\ &= (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \end{aligned}$$

und damit für alle $x, y \in \mathbb{R}$ *die **Additionstheoreme***

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= (\cos(x) + i \cdot \sin(x)) \cdot (\cos(x) - i \cdot \sin(x)) \\ &= \exp(i \cdot x) \cdot \exp(-i \cdot x) = 1 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $|\cos(x)| \le 1$ *und* $|\sin(x)| \le 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Weiter kann man zeigen, dass $\cos(x)$ *genau eine Nullstelle in* $[0, 2]$ *hat. Diese nennt man* $\frac{1}{2}\pi$. *Aus den Additionstheoremen folgt, dass*

$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. *Eine solche Funktion wird auch als **periodisch** bezeichnet (hier mit der Periode* 2π*).*

Zum Beweis der Existenz der Nullstelle verwendet man die Stetigkeit von cos.

Die Stetigkeit von cos *und* sin *folgt aus folgendem allgemeinen Satz, auf den wir im nächsten Kapitel noch allgemeiner zurückkommen werden:*

Satz 7.4.13 *Die durch eine Potenzreihe $P(x)$ definierte Funktion ist stetig.*

7.5 Übungsaufgaben

Übung 7.1 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a < b$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.*

1) *Schreiben Sie ein Programm, das mittels Intervallhalbierung eine Nullstelle von f bestimmt.*

2) *Berechnen Sie damit eine Nullstelle x_0 von*

$$f = 3x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 20x^2 + 9x - 15$$

(siehe Abbildung 7.12) bis auf 5 Fließkommastellen. Ist x_0 eine rationale Zahl?

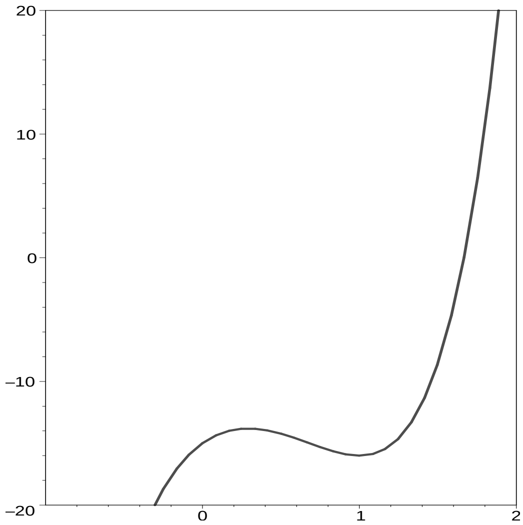


Abbildung 7.12: Funktion mit einer Nullstelle

Übung 7.2 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die kontrahierend ist, d.h. es gebe ein $0 < \lambda < 1$ mit*

$$|f(a) - f(b)| \leq \lambda \cdot |a - b|$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1) *Die Folge* (a_n) *definiert durch* $a_1 = 1$ *und* $a_n = f(a_{n-1})$ *für* $n \geq 2$ *ist eine Cauchyfolge.*

2) *Es existiert ein Fixpunkt von* f*, d.h. ein* $x_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $f(x_0) = x_0$.

3) *Zeigen Sie, dass*

$$f(x) = \frac{1}{7}x + 2$$

kontrahierend ist, bestimmen Sie $a_1, \dots, a_5$ *und einen Fixpunkt von* f *(siehe Abbildung 7.13).*

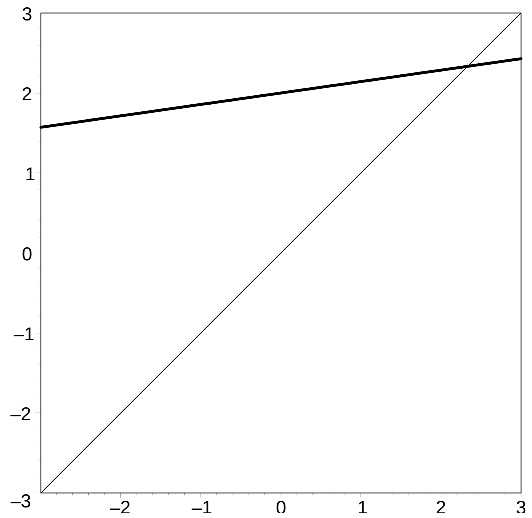


Abbildung 7.13: Fixpunkt einer kontrahierenden Abbildung

Übung 7.3 *Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius:*

$$P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

$$P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

$$P_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

Untersuchen Sie die Konvergenz auch für $|x| = r(P_i)$.

Übung 7.4 *Zeigen Sie:*

1) *Die Potenzreihen*

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

haben Konvergenzradius $r(\cosh) = r(\sinh) = \infty$.

2) *Für die Funktionen* ***Cosinus hyperbolicus*** $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(Abbildung 7.14) und* ***Sinus hyperbolicus*** $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(Abbildung 7.15) gelten die Additionstheoreme*

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$$
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

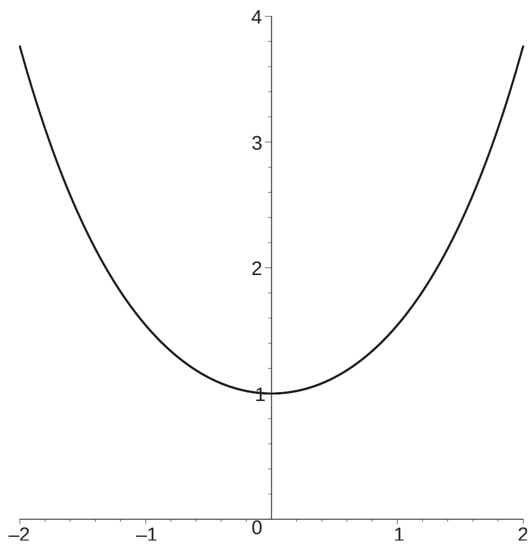


Abbildung 7.14: Cosinushyperbolicus

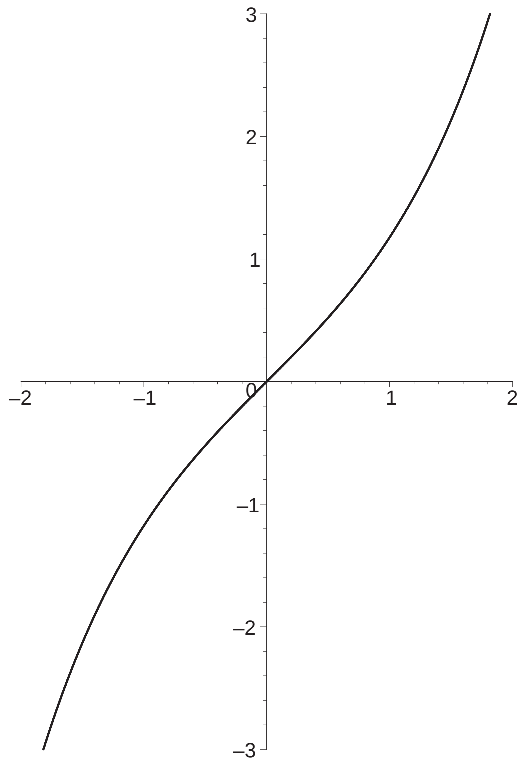


Abbildung 7.15: Sinushyperbolicus

8

Differenzierbarkeit

8.1 Übersicht

Alle wichtigen Prozesse in der Natur können (in idealisierter Form) durch **Differentialgleichungen** beschrieben werden. In ihrer grundlegendsten Form beschreibt eine Differentialgleichung eine Beziehung zwischen einer Funktion $f(x)$ und ihrer Steigung $f'(x)$ der Form

$$f'(x) = \alpha \cdot f(x)$$

mit einer Konstanten α. Beispielsweise ist das Wachstum $f'(x)$ einer Population $f(x)$ als Funktion von der Zeit x ein Vielfaches der aktuellen Größe der Population. In diesem Fall wäre also typischerweise $\alpha > 0$. Um beispielsweise die Kaninchenpopulation in Aufgabe 5.5 für sehr großes n als Funktion $f(x)$ der Zeit x zu beschreiben, würde man für α die asymptotische Wachstumsrate $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nehmen. Genauso könnte $f(x)$ auch die Ladung in einem Kondensator sein. Beim radioaktiven Zerfall ist die pro Zeiteinheit zerfallende Zahl der Teilchen proportional zur Teilchenzahl, hier wäre also $\alpha < 0$.

Das Ziel ist es dann, die Menge aller Funktionen zu $f(x)$ bestimmen, die die Differentialgleichung lösen. Der Einfachheit halber betrachten wir ($\alpha = 1$)

$$f'(x) = f(x).$$

Können wir ein Verfahren beschreiben, das es uns erlaubt, mit dem Computer Lösungen von Differenzialgleichung zu berechnen?

Zunächst stellt sich die Frage, wie wir die **Steigung** $f'(a)$ der Funktion im festgelegten Punkt a herausfinden. Für $x \neq a$ aber nahe bei a erhalten wir eine Näherung durch die Steigung der **Sekante** (Abbildung 7), die wiederum durch den **Differenzenquotienten**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der Funktionswerte und der Argumente gegeben ist. Die Steigung der **Tangente** (Abbildung 6) und damit der Funktion in $x = a$ erhalten wir also durch den Limes

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

falls dieser denn existiert (und dann heißt f differenzierbar), siehe Abbildung 8.1. Beispielsweise ist die Steigung der Parabel

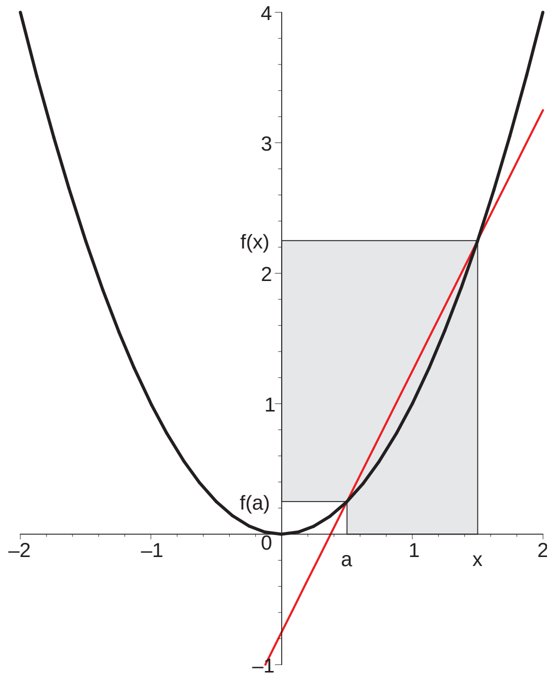


Abbildung 8.1: Sekante und Differenzenquotient

$$f(x) = x^2$$

im Punkt $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a}(x + a) = 2a.$$

Allgemeiner werden wir zeigen, dass

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Nehmen wir für einen Moment an, dass wir Potenzreihen gliedweise ableiten dürfen und wenden jeweils diese Regel an. Für

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

erhalten wir dann

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Die Differentialgleichung

$$f'(x) = f(x)$$

ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$(n+1) a_{n+1} = a_n \text{ für alle } n$$

also induktiv, wenn

$$a_n = a_0 \frac{1}{n!}$$

mit $a_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, d.h.

$$f(x) = a_0 \cdot \exp(x),$$

ist ein Vielfaches der Exponentialfunktion (Abbildung 7.4). Um in einem konkreten Beispiel die Konstante a_0 zu bestimmen, benötigt man noch eine sogenannte **Anfangsbedingung**, z.B. den Funktionswert $f(0) = a_0$.

Im Allgemeinen können Differentialgleichungen auch mehrere Variablen x, mehrfache Ableitungen von f und von x abhängige Koeffizienten $\alpha(x)$ beinhalten. Neben der gerade diskutierten Wachstumsgleichung ist die wichtigste Differentialgleichung sicherlich der harmonische Oszillator, der Schwingungen beschreibt, wie sie z.B. bei Brücken, beim Taktgeber in einem Computer oder in der Quantenmechanik auftreten. Für ein Beispiel siehe Abbildung 8.11 und Übungsaufgabe 8.5.

8.2 Definition und Beispiele

Definition 8.2.1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* ***differenzierbar*** *in $a \in D$, wenn*

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert und $f'(a)$ heißt ***Ableitung*** *von f in a. Weiter heißt f differenzierbar, wenn f in jedem $a \in D$ differenzierbar ist und die Funktion*

$$f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$$

heißt Ableitung von f.

Wir schreiben rekursiv $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ für die ***n-te Ableitung*** *wobei $f^{(0)} = f$ (insbesondere ist also $f^{(2)} = f''$ und $f^{(3)} = f'''$).*

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden in der Definition von $f'(a)$ nur $\lim_{x \to a}$ und setzen $x \neq a$ stillschweigend voraus.

Beispiel 8.2.2 *Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 0$.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

■

Beispiel 8.2.3 *Monomfunktionen $f(x) = x^n$ sind differenzierbar mit*

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Der Fall $n = 0$ folgt aus Beispiel 8.2.2. Für $n \geq 1$ gilt mit der Teleskopsumme

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}),$$

dass

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

■

Eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit:

Satz 8.2.4 *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

Beweis. Es ist mit Satz 5.3.17

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right)\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

■

Beispiel 8.2.5 *Die Funktion*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x\cdot\sin(\frac{1}{x}) & \textit{für } x\neq 0 \\ 0 & \textit{für } x=0 \end{cases}\end{array}$$

ist in $x=0$ stetig, aber nicht differenzierbar, siehe Abbildung 8.2 für den Graphen von f. Für $x\neq 0$ ist f differenzierbar, siehe Abbildung 8.3 für den Graphen von f'.

Beweis. Nach Bemerkung 7.4.12 ist $\left|\sin(\frac{1}{x})\right|\leq 1$ beschränkt, also

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

und somit f stetig in 0. Dagegen existiert

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(\frac{1}{x})-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$$

nicht. Beispielsweise gilt nach Bemerkung 7.4.12 für die Folge $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}$, dass

$$\begin{aligned}\sin(\frac{1}{x_{2n}}) &= \sin(\frac{\pi}{2}+2n\cdot\pi) = 1\\ \sin(\frac{1}{x_{2n+1}}) &= \sin(\frac{\pi}{2}+(2n+1)\cdot\pi) = -1.\end{aligned}$$

Siehe Abbildung 8.4 für den Differenzenquotienten $\sin(\frac{1}{x})$.

■

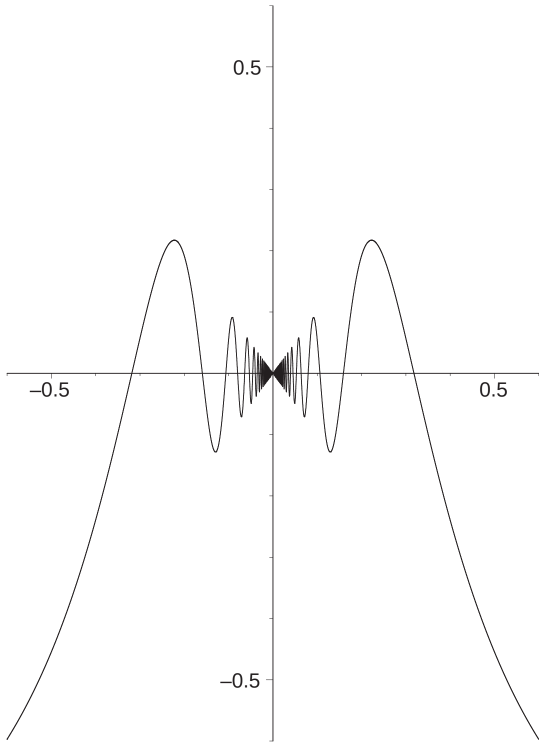


Abbildung 8.2: Stetig, aber nicht differenzierbar in $x = 0$

8.3 Ableitungsregeln

Satz 8.3.1 *Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch $f + g$ mit der* ***Summenregel***

$$(f + g)' = f' + g'$$

und $f \cdot g$ mit der ***Produktregel***

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g.$$

Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit der ***Quotientenregel***

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

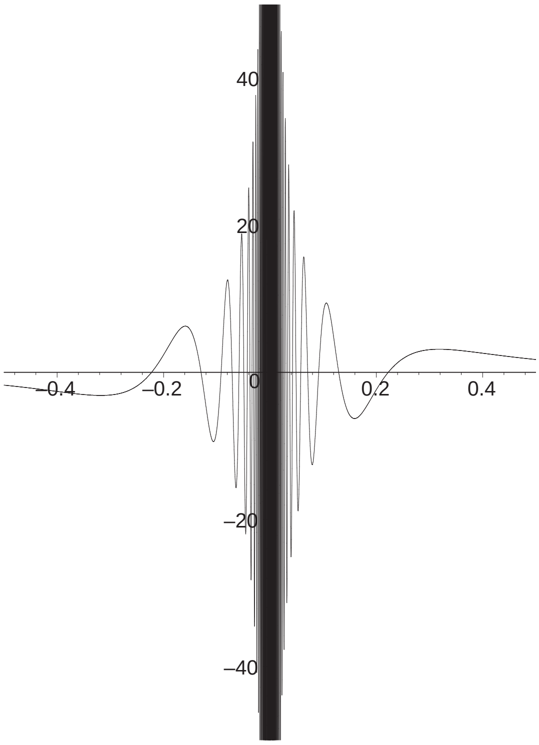


Abbildung 8.3: Ableitung von $x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$.

Beweis. Wir zeigen die Produktregel ausführlich: Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt mit Satz 5.3.17

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a) \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a) \\
&= f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a),
\end{aligned}$$

wobei $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ wegen Satz 8.2.4. Die Summen- und die Quotientenregel zeigt man analog. ∎

Aus Satz 8.3.1 und Beispiel 8.2.3 folgt direkt:

Corollar 8.3.2 *Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind differenzierbar.*

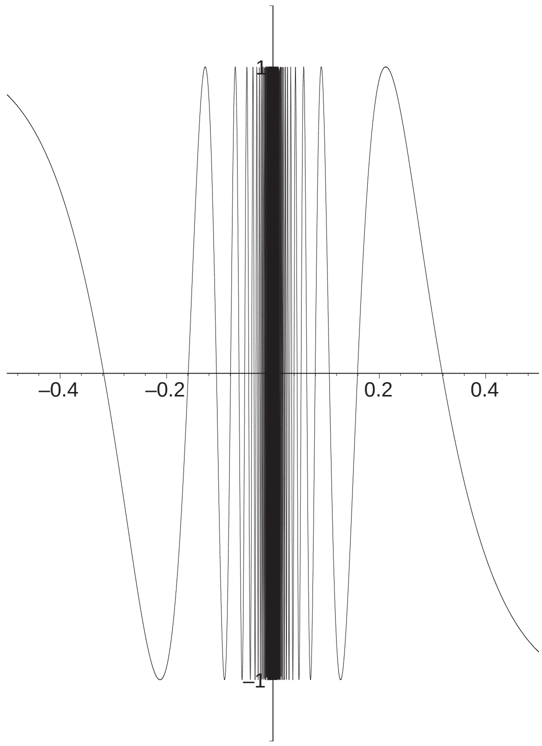


Abbildung 8.4: Differenzenquotient.

Beispiel 8.3.3 *Für* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ *gilt*

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$$

Satz 8.3.4 (Kettenregel) *Sind* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $g : E \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $g(E) \subset D$, *so ist* $f \circ g : E \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und*

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Beweis. Sei $a \in E$. Für

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)} & \text{für} \quad y \neq g(a) \\ f'(g(a)) & \text{für} \quad y = g(a) \end{cases}$$

gilt, da f differenzierbar ist, dass

$$\lim_{y \to g(a)} h(y) = f'(g(a))$$

und

$$f(y) - f(g(a)) = h(y) \cdot (y - g(a))$$

also

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a}\left(h(g(x))\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) \\ &= \lim_{x\to a} h(g(x)) \cdot \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a).\end{aligned}$$

■

Beispiel 8.3.5 *Für $f(x) = (x^2+1)^3$ ist*

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$$

In MAPLE *können wir die Ableitung berechnen mit:*

```
diff((x^2+1)^3,x);
```

$6(x^2+1)^2x$

8.4 Ableiten von Potenzreihen

Den folgenden Satz können wir leider im Rahmen des hier behandelten Stoffs nicht beweisen:

Satz 8.4.1 *Potenzreihen*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sind in ihrem Konvergenzbereich als Funktion differenzierbar mit der gliedweisen Ableitung

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Damit folgt sofort:

Corollar 8.4.2 *Eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist in ihrem Konvergenzbereich als Funktion beliebig oft differenzierbar, und es gilt*

$$a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Beweis. Nach Satz 8.4.1 gilt

$$P'(0) = 1 \cdot a_1 = a_1$$

und durch induktives Anwenden der Ableitungsformel

$$P^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot x^{n-k}$$

für alle $k \geq 1$, also

$$P^{(k)}(0) = k! \cdot a_k.$$

■

Beispiel 8.4.3 *Mit dem Satz erhalten wir (wie auch schon in Abschnitt 8.1 gesehen) für*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

dass auf ganz $\mathbb{R}$

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = \exp(x).$$

Beispiel 8.4.4 *Für*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

gilt auf ganz $\mathbb{R}$*, dass*

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = -\sin(x) \\ \sin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x) \end{aligned}$$

In Maple*:*

```
diff(sin(x),x);
```

$\cos(x)$

```
diff(cos(x),x);
```

$-\sin(x)$

Bemerkung 8.4.5 *Ist*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine Potenzreihe im Entwicklungspunkt x_0, dann ist P differenzierbar in $]x_0 - r(P), x_0 + r(P)[$ und

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Dies folgt sofort aus Satz 8.4.1 angewendet auf $P(x + x_0)$. Induktiv folgt wieder, dass P beliebig oft differenzierbar ist und

$$a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Beispiel 8.4.6 *Nach Übung 8.2 gilt für die Logarithmusreihe*

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

mit $x \in]0, 2[$, dass

$$P'(x) = \frac{1}{x}.$$

8.5 Taylorreihe

In Corollar 8.4.2 haben wir gesehen, dass jede Potenzreihe in ihrem Konvergenzbereich eine beliebig oft differenzierbare Funktion liefert. Umgekehrt kann man auch jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion f eine Potenzreihe zuordnen. Dazu müssen wir die Koeffizienten a_n festlegen. Wollen wir, dass die Potenzreihe in einem festgelegten Entwicklungspunkt x_0 dieselben Ableitungen wie f hat, so muss nach Bemerkung 8.4.5 gelten $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Definition 8.5.1 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in D$ beliebig oft differenzierbare Funktion, so heißt*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

*die **Taylorreihe** von f in x_0.*

Abgesehen von einer geschickten Wahl von x_0 haben wir keinen weiteren Spielraum bei der Darstellung von f als eine Potenzreihe. Im Folgenden werden wir sehen, dass diese Strategie oft funktioniert, aber machmal eben auch nicht: Der Konvergenzradius der Taylorreihe kann 0 sein, und wenn sie konvergiert, dann nicht notwendigerweise gegen f. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 8.5.2 *Die Taylorreihe von*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

(Abbildung 8.5) in $x_0 = 0$ *ist identisch null, d.h.*

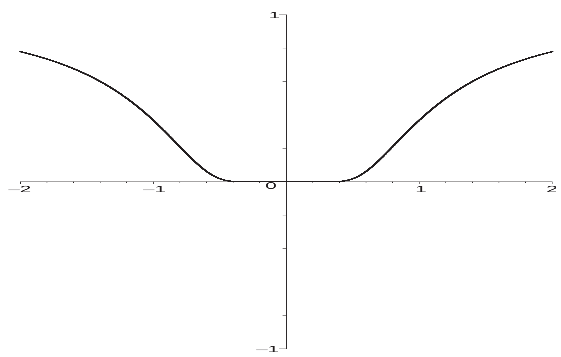


Abbildung 8.5: Funktion mit verschwindender Taylorreihe.

$$T(x) = 0,$$

(siehe Übung 8.8) die Funktion allerdings nicht. Somit ist der Konvergenzradius der Taylorreihe $r(T) = \infty$, *aber die Taylorreihe konvergiert nicht gegen* f.

In MAPLE *können wir folgendermaßen zeigen, dass die Ableitung in* $x = 0$ *verschwindet:*

```
g:=diff(exp(-1/x^2),x);
```

$$\frac{2e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{x^3}$$

```
limit(g,x=0);
```

0

Wie kann man also überprüfen, ob an einem gegebenen x die Taylorreihe gegen den Funktionswert konvergiert, d.h. ob $T(x) = f(x)$?

Notation 8.5.3 *Sei f in x_0 mindestens k-mal differenzierbar (d.h. $f'(x_0), \ldots, f^{(k)}(x_0)$ existieren). Mit dem k-ten* ***Taylorpolynom***

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ist das k-te ***Restglied*** *der Taylorreihe von f*

$$R_k(x) = f(x) - T_{k-1}(x)$$

Insbesondere gilt

$$T(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} R_k(x) = 0,$$

denn $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$. Mit der folgenden Darstellung des Restglieds (deren Beweis über den hier behandelten Stoff hinausgeht) lässt sich oft die Konvergenz der Taylorreihe beweisen:

Satz 8.5.4 (Lagrange) *Sei $f :]r, s[\to \mathbb{R}$ mindestens $(k+1)$-mal differenzierbar und $R_k(x)$ das k-te Restglied der Taylorreihe von f in $x_0 \in]r, s[$. Dann gibt es für jedes $x \in]r, s[$ ein $b(x)$ zwischen x_0 und x, sodass*

$$R_k(x) = \frac{f^{(k)}(b(x))}{k!}(x - x_0)^k.$$

Beispiel 8.5.5 *Für $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ gilt mit der Quotientenregel 8.3.1 und der Kettenregel 8.3.4*

$$f^{(n)}(x) = n!\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

also

$$f^{(n)}(0) = n!$$

und somit ist die Taylorreihe in $x_0 = 0$ die geometrische Reihe

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Die Funktion f wird auf dem Konvergenzintervall $]-1,1[$ durch die Taylorpolynome $T_k(x)$ angenähert, siehe Abbildung 8.6 für die Graphen von f und $T_0, ..., T_5$. In MAPLE *erhalten wir z.B. das* 5*-te Taylorpolynom von f mit:*

```
taylor(1/(1-x),x=0,5);
```

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^6)$

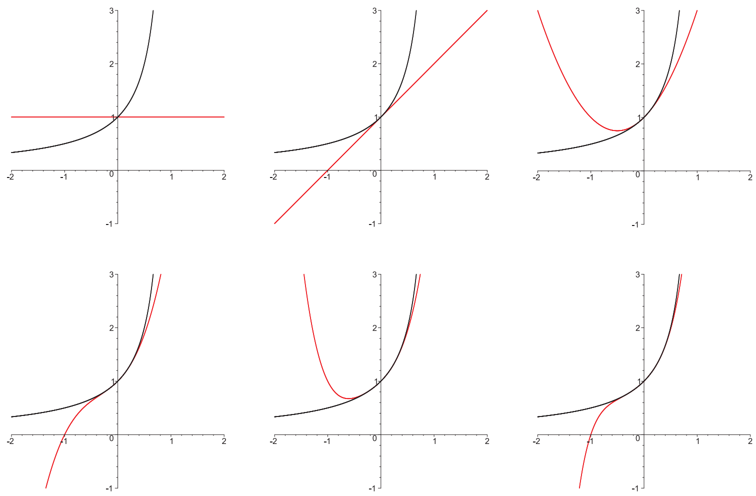


Abbildung 8.6: Taylorpolynome

Mit Hilfe des Restglieds kann man Funktionen lokal untersuchen:

8.6 Extremwerte

Zur qualitativen Beschreibung des Verhaltens einer Funktion ist es oft nützlich, ihre Extremwerte, d.h. ihre Minima und Maxima zu bestimmen.

Definition 8.6.1 *Für eine Funktion $f :]r, s[\to \mathbb{R}$ heißt $a \in]r, s[$ ein lokales* ***Minimum****, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$f(x) \geq f(a)$$

für alle $|x - a| < \varepsilon$. Gilt dagegen

$$f(x) \leq f(a)$$

so spricht man von einem lokalen ***Maximum****, gilt*

$$f(x) < f(a) \text{ für } x < a \text{ und}$$
$$f(x) > f(a) \text{ für } x > a$$

oder

$$f(x) > f(a) \text{ für } x < a \text{ und}$$
$$f(x) < f(a) \text{ für } x > a$$

dann von einem ***Sattelpunkt****.*

Über die Ableitung erhalten wir ein notwendiges Kriterium für ein lokales Minimum oder Maximum.

Satz 8.6.2 *Ist $f :]r,s[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in]r,s[$ und hat dort ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt*

$$f'(a) = 0.$$

Beweis. Ist a ein lokales Minimum, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) \geq f(a)$$

für alle $|x-a| < \varepsilon$. Dann ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \text{ für } x > a$$

und

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \text{ für } x < a$$

also mit Lemma 5.4.38 und der Differenzierbarkeit von f

$$0 \geq \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

also

$$f'(a) = 0.$$

Die Aussage für das Maximum zeigt man analog. ■

Der folgende Satz gibt uns ein hinreichendes Kriterium für lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte:

Satz 8.6.3 *Ist* $f :]r, s[\to \mathbb{R}$ *mindestens* k*-mal differenzierbar, ist* $f^{(k)}$ *stetig und*

$$f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ und } f^{(k)}(a) \neq 0$$

mit $k \geq 2$*, dann hat* f *in* a *ein*

> *lokales Maximum, wenn* k *gerade ist und* $f^{(k)}(a) < 0$
> *lokales Minimum, wenn* k *gerade ist und* $f^{(k)}(a) > 0$
> *und einen Sattelpunkt, wenn* k *ungerade ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für das $(k-1)$-te Taylorpolynom von f in a, dass

$$T_{k-1}(x) = f(a)$$

also

$$f(x) = f(a) + R_k(x).$$

Sei $f^{(k)}(a) > 0$ und k gerade. Da $f^{(k)}$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f^{(k)}(b) > 0$$

für alle b mit $|b - a| < \varepsilon$. Somit ist für alle x mit $|x - a| < \varepsilon$

$$R_k(x) = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-a)^k > 0,$$

also a ein lokales Minimum. Für $f^{(k)}(a) < 0$ erhält man analog $R_k(x) < 0$, d.h. a ist ein lokales Maximum. Für k ungerade wechselt $(x-a)^k$ in $x = a$ das Vorzeichen, und somit liegt ein Sattelpunkt vor. ∎

Bemerkung 8.6.4 *Insbesondere erhalten wir mit* $k = 2, 3$ *folgende Kriterien:*

$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) < 0 \Rightarrow \textit{lokales Maximum}$$
$$f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) > 0 \Rightarrow \textit{lokales Minimum}$$
$$f'(a) = f''(a) = 0 \text{ und } f'''(a) \neq 0 \Rightarrow \textit{Sattelpunkt}$$

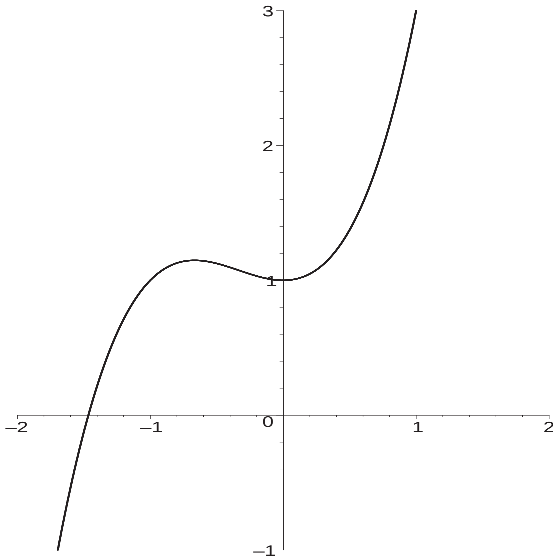


Abbildung 8.7: Lokales Minimum bei $x = 0$.

Beispiel 8.6.5 *Die Funktion*

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

(Abbildung 8.7) hat in $x = 0$ ein lokales Minimum, denn

$$f'(0) = 0 \text{ und } f^{(2)}(0) = 2 > 0,$$

die Funktion

$$f(x) = -x^4 + 1$$

(Abbildung 8.8) hat in $x = 0$ ein lokales Maximum, denn

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0 \text{ und } f^{(4)}(0) = -24 < 0$$

und

$$f(x) = x^3 + 1$$

(Abbildung 8.9) hat in $x = 0$ einen Sattelpunkt, denn

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = 0 \text{ und } f^{(3)}(0) = 6 \neq 0.$$

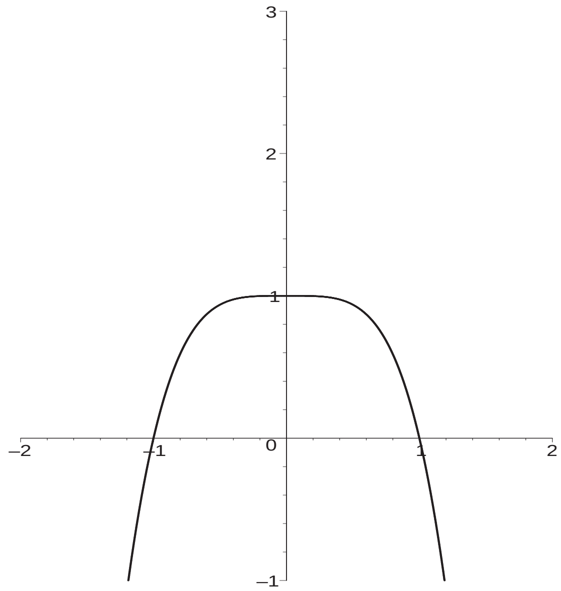


Abbildung 8.8: Lokales Maximum

8.7 Mittelwertsatz

Satz 8.7.1 (Mittelwertsatz) *Sind $f, g : [r, s] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]r, s[$ differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]r, s[$ dann gibt es ein $a \in]r, s[$ mit*

$$\frac{f(s) - f(r)}{g(s) - g(r)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Zunächst ein Beispiel in dem wichtigen Spezialfall $g(x) = x$:

Beispiel 8.7.2 *Abbildung 8.10 zeigt für $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - x)$ und $g(x) = x$ die beiden Werte $a = \pm\sqrt{2}$ mit*

$$1 = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = f'(a) = a^2 - \frac{1}{3}.$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $g(x) = x$ und $f(r) = f(s)$. Ist f konstant, dann ist $f'(a) = 0$ für alle $a \in]r, s[$. Sei also f nicht konstant. Da f stetig ist, nimmt f auf $[r, s]$ ein Minimum

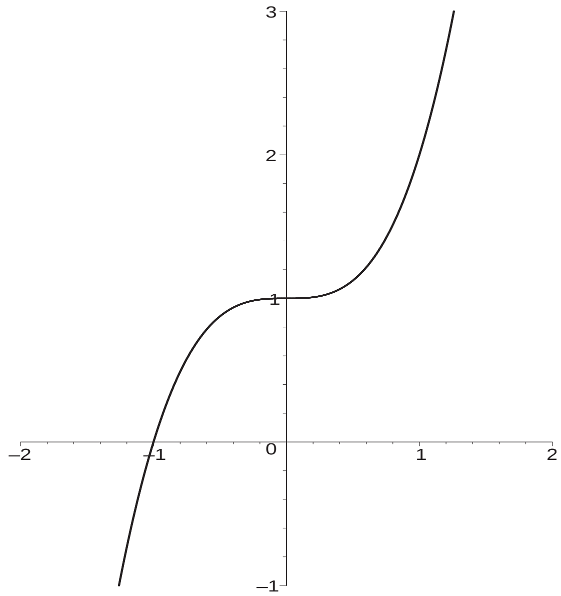


Abbildung 8.9: Sattelpunkt

und ein Maximum an, und eines von beiden ist verschieden von $f(r) = f(s)$, wird also für ein $a \in]r, s[$ angenommen. Nach Satz 8.6.2 ist $f'(a) = 0$.

Diese Aussage angewendet auf g zeigt, dass $g(s) \neq g(r)$, denn sonst gäbe es ein $a \in]r, s[$ mit $g'(a) = 0$.

Wir können die Aussage also nochmals auf die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(s) - f(r)}{g(s) - g(r)}(g(x) - g(r))$$

anwenden, die $F(r) = F(s)$ erfüllt. Damit erhalten wir ein a mit

$$0 = F'(a) = f'(a) - \frac{f(s) - f(r)}{g(s) - g(r)} g'(a).$$

■

Corollar 8.7.3 *Ist $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]r, s[$ differenzierbar mit $f'(a) = 0$ für alle $a \in]r, s[$, dann ist f konstant.*

Beweis. Für alle $r \leq x < y \leq s$ gibt der Mittelwertsatz 8.7.1, dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$$

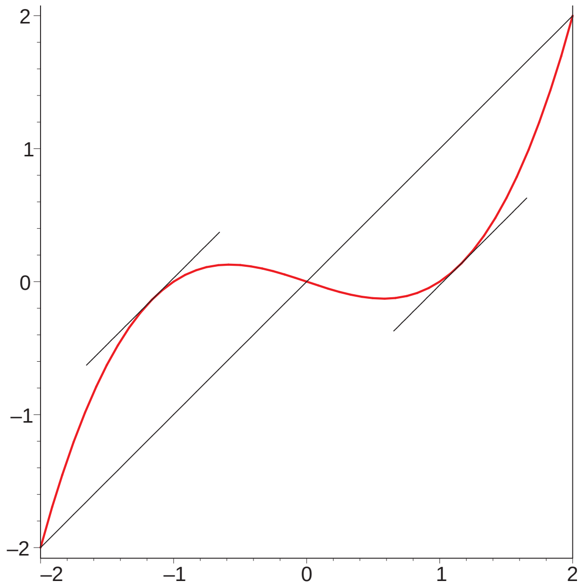


Abbildung 8.10: Mittelwertsatz

also $f(y) = f(x)$. ∎

8.8 Regel von l'Hospital

Satz 8.8.1 *Sind $f, g :]r, s[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]r, s[$. Ist*

$$\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \infty$$

und existiert $\lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann gilt

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dabei ist auch $s = \infty$ zugelassen.

Beispiel 8.8.2 *Für alle $n > 0$ gibt induktives Anwenden des Satzes*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

Die Exponentialfunktion wächst also für große x schneller als jede Polynomfunktion.

Nun zum Beweis des Satzes:

Beweis. Sei $s < \infty$ und $\lim_{x \to s} f(x) = \lim_{x \to s} g(x) = 0$. Mit Satz 8.2.4 definieren f und g stetige Funktionen auf $]r, s]$ mit $f(s) = g(s) = 0$. Sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = s$. Nach dem Mittelwertsatz 8.7.1 gibt es zu jedem x_n ein a_n mit $x_n < a_n < s$ und

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(s) - f(x_n)}{g(s) - g(x_n)} = \frac{f'(a_n)}{g'(a_n)}$$

Da auch $\lim_{n \to \infty} a_n = s$ folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(a_n)}{g'(a_n)} = \lim_{x \to s} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

da der letztere Grenzwert nach Voraussetzung existiert.

Die anderen Fälle zeigt man analog. ■

Im nächsten Kapitel werden wir noch weitere Beispiele sehen, ebenso bei einigen der Grenzwerte in den Übungsaufgaben 8.9 und 9.1.

8.9 Übungsaufgaben

Übung 8.1 *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die n-mal differenzierbar sind. Zeigen Sie*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Übung 8.2 *Bestimmen Sie die Ableitung der Potenzreihe*

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

und zeigen sie, dass für alle $x \in]-1, 1[$ gilt

$$P'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Übung 8.3 *Zeigen Sie, dass für $x \in]-1, 1[$ gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x \cdot (1+x)}{(1-x)^3}$$

Hinweis: Ableiten der geometrischen Reihe.

Übung 8.4 *Zeigen Sie, dass die Funktionen* cosh *und* sinh *aus Übung 7.4 differenzierbar sind mit*

$$\cosh(x)' = \sinh(x) \qquad \sinh(x)' = \cosh(x) \quad .$$

Übung 8.5 *Die Beschleunigung $x''(t)$ des Fahrzeugs in Abbildung 8.11 zum Zeitpunkt t setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen:*

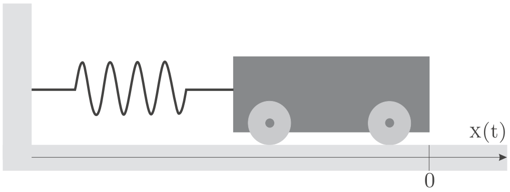


Abbildung 8.11: Harmonischer Oszillator

- *Die Beschleunigung durch die Feder ist proportional zur Auslenkung $x(t)$.*
- *Die Reibung liefert einen Beitrag proportional zur Geschwindigkeit $x'(t)$.*

In unserem Beispiel seien die Beiträge $-4 \cdot x(t)$ und $-2 \cdot x'(t)$. Somit soll die Position $x(t)$ des Fahrzeugs die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$x''(t) = -4 \cdot x(t) - 2 \cdot x'(t)$$

*Die Differentialgleichung beschreibt ein Beispiel eines gedämpften **harmonischen Oszillators**. Dieser spielt eine wichtige Rolle in Technik und Physik, z.B. bei Schwingungen von Brücken, beim Taktgeber in einem Computer oder in der Quantenmechanik.*

1) *Zeigen Sie, dass jede der folgenden Funktionen diese Differentialgleichung löst:*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp(-t) \cdot \sin(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) &= \exp(-t) \cdot \cos(\sqrt{3}t) \\ x(t) &= c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) *Zum Zeitpunkt $t = 0$ ziehen wir den Wagen auf die Position $x(0) = 1$ und geben ihm einen Schubs mit der Geschwindigkeit $x'(0) = 1$. Bestimmen Sie die Position $x(t)$ als Funktion von der Zeit $t \geq 0$.*

3) *Erstellen Sie einen Plot der Lösung $x(t)$.*

Übung 8.6 *Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

1) *Bestimmen Sie alle Nullstellen, lokalen Minima und lokalen Maxima von f.*

2) *Zeigen Sie*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty$$

3) *Erstellen Sie einen qualitativen Plot des Graphen von f.*

4) *Überprüfen Sie alle Ihre Ergebnisse mit* Maple.

Übung 8.7 *Das Newtonverfahren berechnet für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Startwert $x_1 \in \mathbb{R}$ die Folge*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

d.h. x_{n+1} ist die Nullstelle der Tangente von f in x_n, siehe Abbildung 8.12.

1) *Zeigen Sie, dass für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_1 = 1$ die Folge (x_n) konvergiert und $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.*

2) *Bestimmen Sie die ersten 5 Folgeglieder bis auf 10 Fließkommastellen.*

3) *Wenden Sie das Newtonverfahren auch auf $f(x) = x^2$ und $x_1 = 1$ an.*

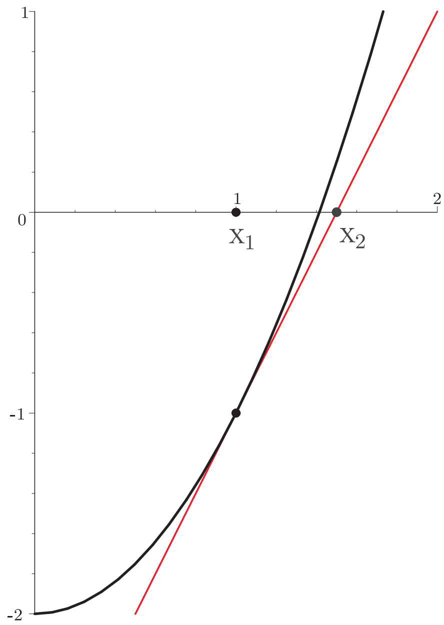


Abbildung 8.12: Newtonverfahren

Übung 8.8 *Zeigen Sie, dass für*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

gilt

$$f^{(k)}(0) = 0 \textit{ für alle } k \geq 0$$

und somit ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 *identisch* 0. *Siehe Abbildung 8.5.*

Übung 8.9 *Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:*

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

2) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x\,(x+a)} - x\right)$ *mit* $a \in \mathbb{R}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin(x)}$

9

Umkehrfunktion

9.1 Überblick

Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, hat jede bijektive Abbildung eine Umkehrabbildung. Insbesondere hat also jede injektive Funktion auf ihrem Bild eine Umkehrabbildung, genannt **Umkehrfunktion**. Ein einfaches Kriterium für Injektivität erhalten wir für stetige Funktionen auf einem Intervall durch den Begriff der Monotonie.

Eine wesentliche Anwendung der Umkehrfunktion ist die Konstruktion des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Dies erlaubt es uns, die Definition der Logarithmusfunktion über die auf $]0,2]$ konvergenten Logarithmusreihe (Beispiel 7.2.5), auf ganz $]0,\infty[$ auszudehnen. Weiter zeigt dies, dass

$$\exp(\ln(x)) = x$$

für alle $x \in]0,\infty[$ und

$$\ln(\exp(x)) = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Verhalten der Logarithmusfunktion für große x (ebenso wie das der Exponentialfunktion) spielt eine entscheidende Rolle bei Laufzeitabschätzungen in der Informatik.

9.2 Definition und Existenz

Definition 9.2.1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ nennen wir*

monoton wachsend		$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
streng monoton wachsend	*falls*	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
streng monoton fallend		$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

für alle $x_i \in D$.

Satz 9.2.2 *Ist $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, dann gibt es eine eindeutige Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : [f(r), f(s)] \to \mathbb{R}$$

mit

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id} \ \text{ und } \ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Weiter ist f^{-1} stetig und streng monton wachsend.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz 7.3.11 ist die Abbildung

$$f : [r, s] \to [f(r), f(s)]$$

surjektiv. Weiter ist f injektiv, da $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, also auch $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, somit insbesondere

$$x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2).$$

Das Argument zeigt auch, dass

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Somit gibt es eine Umkehrabbildung

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b],$$

und diese ist wieder streng monoton wachsend. ■

Es gilt ebenso die analoge Aussage für streng monton fallende Funktionen, wobei dann $f^{-1} : [f(s), f(r)] \to \mathbb{R}$.

9.3 Logarithmus

Definition und Satz 9.3.1 *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig und streng monoton wachsend und* $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. *Somit gibt es eine Umkehrfunktion*

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

genannt ***Logarithmusfunktion***.

Als Umkehrfunktion entsteht der Graph von ln durch Spiegelung des Graphen von exp an der Diagonalen, siehe Abbildung 9.1. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass sich die Lo-

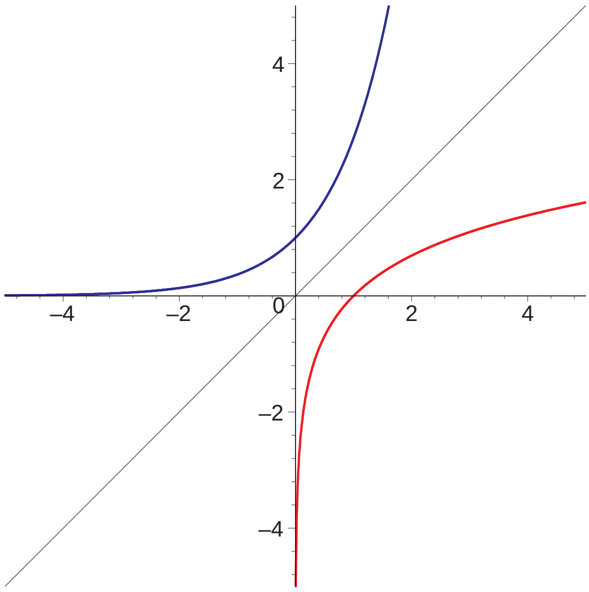


Abbildung 9.1: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion.

garithmusfunktion im Intervall $]0, 2]$ durch die Logarithmusreihe darstellen lässt. Zunächst aber zur Existenz:

Beweis. Die Stetigkeit von exp haben wir in Beispiel 7.3.6 gezeigt. Zur Monotonie: Für $x > 0$ ist

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots > 1 + x > 1.$$

Mit der Funktionalgleichung (Corollar 6.5.12) ist für $x_2 > x_1$

$$\begin{aligned}\exp(x_2) &= \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1)\\ &> 1 \cdot \exp(x_1)\\ &> \exp(x_1)\end{aligned}$$

also ist exp streng monoton steigend. Es bleibt also nur noch das Folgende zu zeigen: ∎

Lemma 9.3.2 *Das Bild der Exponentialfunktion ist*

$$\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[.$$

Beweis. Wegen $\exp(x) \geq 1 + x$ für $x \geq 0$ folgt

$$\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty.$$

Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

Somit erhalten wir für $x \leq 0$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

denn $\exp(-x) \geq 1 - x$, also

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Die Behauptung folgt dann mit der Monotonie und dem Zwischenwertsatz (Corollar 7.3.11). ∎

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir sofort die **Funktionalgleichung des Logarithmus**:

Satz 9.3.3 *Für alle $x, y > 0$ gilt*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Beweis. Mit Corollar 6.5.12 gilt

$$\exp(\ln(xy)) = xy = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = \exp(\ln(x) + \ln(y)).$$

Da exp nach Definition und Satz 9.3.1 injektiv ist, folgt die Behauptung. ∎

9.4 Allgemeine Potenzen

Mit dem Logarithmus können wir **allgemeine Potenzen** definieren:

Definition 9.4.1 *Für jedes $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei*

$$x^a = \exp(a \cdot \ln(x)).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

*auch als **n-te Wurzel** von x.*

Bemerkung 9.4.2 *Aus der Definition folgt unmittelbar*

$$\ln(x^a) = a \cdot \ln(x).$$

Bemerkung 9.4.3 *Für $a \in \mathbb{N}$ haben wir bereits die in jedem Ring gültige Notation*

$$x^a = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a\text{-mal}}.$$

Diese stimmt mit der allgemeinen Potenz überein, denn mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt

$$\begin{aligned} \exp(a \cdot \ln(x)) &= \exp(\underbrace{\ln(x) + \ldots + \ln(x)}_{a\text{-mal}}) \\ &= \underbrace{\exp(\ln(x)) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln(x))}_{a\text{-mal}} \\ &= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{a\text{-mal}}. \end{aligned}$$

Allgemeiner erhalten wir mit den Funktionalgleichungen von Logarithmus und Exponentialfunktion:

Satz 9.4.4 *Für alle $x, y > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} x^{a+b} &= x^a \cdot x^b \\ (xy)^a &= x^a \cdot y^a \\ (x^a)^b &= x^{a \cdot b} \end{aligned}$$

Beweis. Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Corollar 6.5.12) gilt

$$\begin{aligned} x^{a+b} &= \exp((a+b)\cdot\ln(x)) = \exp(a\cdot\ln(x) + b\cdot\ln(x)) \\ &= \exp(a\cdot\ln(x))\cdot\exp(b\cdot\ln(x)) = x^a\cdot x^b, \end{aligned}$$

und mit der Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion (Satz 9.3.3)

$$\begin{aligned} (xy)^a &= \exp(a\cdot\ln(xy)) = \exp(a\cdot\ln(x) + a\cdot\ln(y)) \\ &= \exp(a\cdot\ln(x))\cdot\exp(a\cdot\ln(y)) = x^a\cdot y^a. \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 9.4.2 folgt

$$(x^a)^b = \exp(b\cdot\ln(x^a)) = \exp(a\cdot b\cdot\ln(x)) = x^{a\cdot b}.$$

■

Bemerkung 9.4.5 *Mit der* ***Eulerschen Zahl***

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \approx 2.718281828$$

lässt sich die Exponentialfunktion auch als allgemeine Potenz ausdrücken, denn

$$e^x = \exp(x\cdot\ln(e)) = \exp(x).$$

mit $\ln(e) = 1$.

9.5 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 9.5.1 *Ist* $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und streng monoton wachsend. Dann ist*

$$f^{-1} : [f(r), f(s)] \to \mathbb{R}$$

differenzierbar in allen y *mit* $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ *und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $[f(r), f(s)]$ mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ und $y_n \neq y$ für alle n. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} &= \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}\\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}}\end{aligned}$$

wobei wir den Kehrbruch bilden dürfen, weil f^{-1} nach Satz 9.2.2 streng monoton ist, und somit $f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y)$ für alle n. Mit Satz 5.3.17 zu den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(f^{-1}(y_n)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}}\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass f^{-1} nach Satz 9.2.2 stetig ist, und somit $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$, und dass f' differenzierbar ist, also der Differenzenquotient gegen die Ableitung konvergiert. ∎

Beispiel 9.5.2 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist streng monoton steigend, hat also eine Umkehrfunktion $y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ und*

$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

für alle $y \neq 0$. Da $f'(0) = 0$, ist die Umkehrfunktion in $0 = f(0)$ nicht differenzierbar, da sie eine vertikale Tangente hat (siehe Abbildung 9.2).

Beispiel 9.5.3 *Die Ableitung des Logarithmus ist*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

denn mit Satz 9.5.1 gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

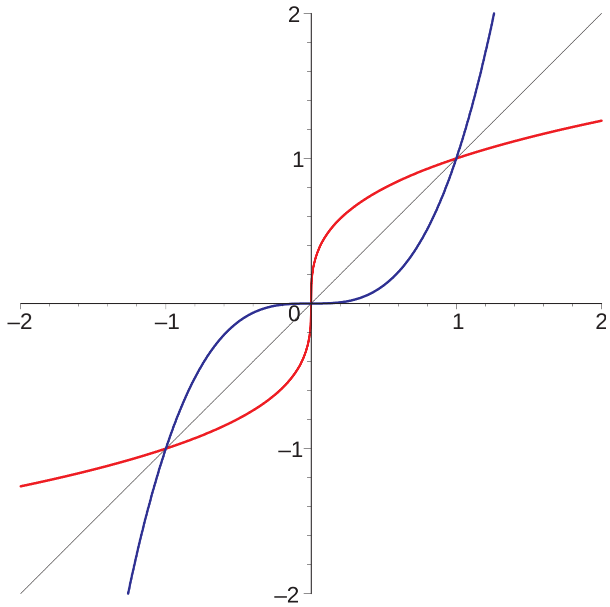


Abbildung 9.2: Umkehrfunktion von $f(x) = x^3$ mit vertikaler Tangente

für alle $x \in]0, \infty[$.

Damit erhält man auch die Ableitungsregel

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

für die allgemeine Potenz, denn mit der Kettenregel 8.3.4 gilt

$$\begin{aligned}(x^a)' &= (\exp(a \cdot \ln(x)))' = \exp(a \cdot \ln(x)) \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\ &= a \cdot x^a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1}.\end{aligned}$$

Bemerkung 9.5.4 *Die Logarithmusfunktion (d.h. die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion)*

$$\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$$

wird im Intervall $]0, 2[$ *durch die Logarithmusreihe*

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

dargestellt, d.h.

$$\ln(x) = P(x)$$

für alle $x \in]0,2[$.

Beweis. Da für $x \in]0,2[$ gilt

$$P'(x) = \frac{1}{x} = \ln'(x),$$

ist nach Corollar 8.7.3 die Funktion

$$\ln(x) - P(x) = c$$

auf $]0,2[$ konstant mit $c \in \mathbb{R}$. Da $\exp(0) = 1$, gilt

$$\ln(1) = 0 = P(1),$$

also $c = 0$. ■

9.6 Nochmal zur Laufzeitanalyse

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus spielen eine wichtige Rolle bei der Klassifizierung der Laufzeit von Algorithmen. Mittels der Notation 7.3.1 für die Grenzwertbildung von Funktionen wollen wir die Bemerkungen zur Laufzeit aus Abschnitt 5.1.1 noch etwas verfeinern.

Als **Laufzeit** eines Algorithmus bezeichnen wir die Anzahl der Operationen, die vom Prozessor in einem Taktzyklus abgehandelt werden, z.B. Addition, Multiplikation und Division mit Rest. Diese wird typischerweise als Funktion in der Bitgröße des Inputs angegeben.

Um für eine Funktion $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ das Wachstum von $g(x)$ für $x \to \infty$ zu beschränken, führen wir folgende Notation ein:

Definition 9.6.1 *Für* $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *sei*

$$O(f) = \{g :]0,\infty[\to \mathbb{R} \mid \exists c, x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } |g(x)| \leq c \cdot |f(x)| \ \ \forall x \geq x_0\}$$

Statt $g \in O(f)$ *schreibt man in der* ***Landau-Notation*** *auch* $g = O(f)$.

Bemerkung 9.6.2 *Insbesondere wenn*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$$

existiert und endlich ist, dann gilt $g \in O(f)$. *Somit verallgemeinert unsere Definition, die in dem einführenden Abschnitt 5.1.1 verwendete Notation.*

Beispiel 9.6.3 $2x^4+5x^3-2 \in O(x^4)$ *denn* $|2x^4+5x^3-2| \le 9\cdot|x^4|$ *für* $x \ge 1$.

Beispiel 9.6.4 *Die folgenden Laufzeitklassen kommen häufig vor und haben deshalb explizite Namen:*

	Name	*Beispiel*
$O(1)$	*beschränkt*	*Anhängen an Liste*
$\cap$		
$O(\ln(n))$	*logarithmisch*	*Schnelles Potenzieren*
$\cap$		
$O(\sqrt{n})$	*sublinear*	*Faktorisierung mittels Probedivision*
$\cap$		
$O(n)$	*linear*	*Addition*
$\cap$		
$O(n\ln(n))$	*superlinear*	*Mergesort*
$\cap$		
$O(n^c)$	$c \ge 2$ *polynomial* $c = 2$ *quadratisch* $c = 3$ *kubisch*	 *Schulbuchmultiplikation* *Matrizenmultiplikation*
$\cap$		
$O(\exp(n))$	*exponentiell*	*Simplexalgorithmus*
$\cap$		
$O(\exp(\exp(n)))$	*doppeltexponentiell*	*Gröbnerbasen*

Die angegebenen Inklusionen folgen wegen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^c}{\exp(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^c} = 0$$

für alle $c > 0$. Den ersten Grenzwert zeigt man analog zu Beispiel 8.8.2 mit der Regel von l'Hospital. Ebenso erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{c\cdot x\cdot x^{c-1}} = 0.$$

Zum Vergleich der verschiedenen Laufzeitklassen siehe auch Abbildung 9.3.

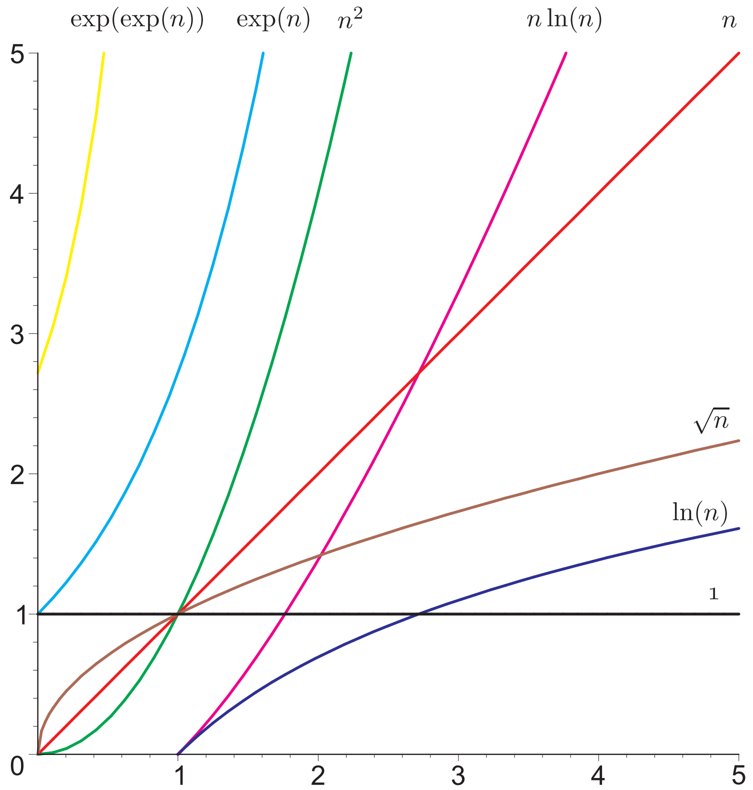


Abbildung 9.3: Vergleich der Asymptotik für große n.

Algorithmus 9.1 Potenzieren

Input: x in einem Ring R und $n \in \mathbb{N}$

Output: x^n

```
if n = 0 then
    return 1
Potenzieren y = x^{⌊n/2⌋} (rekursiver Aufruf)
if n gerade then
    return y^2
else
    return x · y^2
```

Beispiel 9.6.5 *In Abschnitt 5.1.1 haben wir gezeigt, dass die Schulbuchmultiplikation Laufzeit in $O(n^2)$ hat.*

Beispiel 9.6.6 *Wir diskutieren noch kurz die Laufzeit des schnellen Potenzierens in Algorithmus 9.1. Dabei nehmen wir an, dass die Laufzeit für jede Multiplikation immer dieselbe Konstante ist. Dies ist z.B. richtig für $\mathbb{Z}/m$ oder wenn wir mit Fließkommazahlen rechnen. In $\mathbb{Z}$ gilt dies natürlich nicht, da sich beim Quadrieren die Bitgröße verdoppelt und somit die Laufzeit für das nächste Quadrieren vervierfacht.*

Da sich in jeder Iteration von Algorithmus 9.1 die Zahl n halbiert, ist die Gesamtzahl der Multiplikationen beschränkt durch r mit

$$n = 2^r = \exp(\ln(2) \cdot r)$$

also

$$r = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} = \log_2(n).$$

Mit $a, x \in \mathbb{R}$ positiv schreiben wir allgemein

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

für den ***Logarithmus von x zur Basis a****. Für diesen gilt*

$$a^{\log_a(x)} = \exp(\ln(a) \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(a)}) = x.$$

Beispiel 9.6.7 *Ein ähnliches Divide-and-Conquer-Argument wie beim schnellen Potenzieren ist für den **Mergesort**-Algorithmus anwendbar. Wollen wir z.B. die Liste*

$$(5, 1, 2, 7, 1, 6, 4, 3)$$

der Länge n sortieren, so unterteilen wir diese schrittweise in Listen der halben Länge

$$\begin{array}{c} (5,1,7,2) \quad (1,6,4,3) \\ (5,1) \quad (7,2) \quad (1,6) \quad (4,3) \\ (5) \quad (1) \quad (7) \quad (2) \quad (1) \quad (6) \quad (4) \quad (3) \end{array}$$

und fügen wieder sortiert zusammen

$$\begin{array}{c} (1,5) \quad (2,7) \quad (1,6) \quad (3,4) \\ (1,2,5,7) \quad (1,3,4,6) \\ (1,1,2,3,4,6,7) \end{array}$$

Man kann zeigen, dass jeder Kombinationsschritt $O(n)$ Operationen benötigt, wobei es offenbar $O(\ln(n))$ Kombinationsschritte gibt. Somit erhalten wir eine Laufzeit von $O(n \ln(n))$.

Beispiel 9.6.8 *Der **Simplex-Algorithmus** ist einer der zentralen Algorithmen in der Optimierung. Er bestimmt eine Lösung eines **linearen Programms**, d.h. ein Minimum einer Linearform*

$$c^t x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

auf der Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, die das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

lösen und

$$x \geq 0$$

(d.h. komponentenweise $x_i \geq 0$) erfüllen.

Beispiel 9.6.9 *Der **Gröbnerbasen-Algorithmus** (auch Buchberger-Algorithmus genannt) verallgemeinert den Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme und den Euklidischen Algorithmus zur*

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers, um damit polynomiale Gleichungssysteme in mehreren Variablen zu lösen. Siehe dazu Abschnitt 11.2 für ein Beispiel in dem Computeralgebrasystem SINGULAR. *Obwohl er doppeltexponentielle Laufzeit hat, ist er dennoch auf viele praktische Beispiele anwendbar. Dies zeigt, dass es oft nicht auf die asymtotische Laufzeit für große n ankommt, sondern auch auf die Laufzeit für kleine n.*

9.7 Übungsaufgaben

Übung 9.1 *Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:*

1) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x}$
2) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\,(\ln x)^n = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.
3) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$
4) $\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k}}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Übung 9.2 *Zeigen Sie:*

1) *Die Einschränkung der Sinusfunktion auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *ist streng monoton steigend mit Bild* $[-1, 1]$, *und die Umkehrfunktion*

$$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

ist auf $]-1, 1[$ *differenzierbar mit*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Siehe Abbildung 9.4.

2) *Die Einschränkung der Cosinusfunktion auf* $[0, \pi]$ *ist streng monoton fallend mit Bild* $[-1, 1]$, *und die Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

ist auf $]-1, 1[$ *differenzierbar mit*

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Siehe Abbildung 9.5.

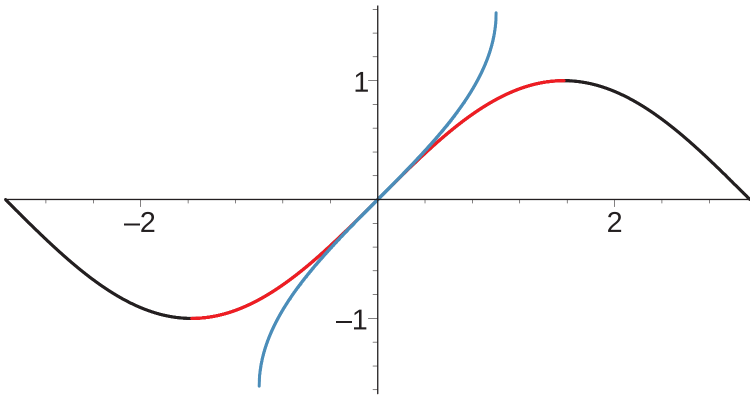


Abbildung 9.4: Sinus und Arcussinus

Übung 9.3 *Die* ***Tangensfunktion*** *ist definiert als*

$$\begin{array}{rlcl} \tan: & \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Zeigen Sie:

1) *Die Tangensfunktion ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar mit*

$$\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2.$$

2) *Die Tangensfunktion ist auf* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *streng monoton steigend mit Bild* $\mathbb{R}$ *und die Umkehrfunktion*

$$\arctan:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

ist differenzierbar mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Siehe Abbildung 9.6.

Übung 9.4 *Sortieren Sie die Funktionen* $f_i:]0,\infty[\to\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^{\ln x} & f_4(x) = 3^x \\ f_2(x) = e^{x\cdot\ln(x)} & f_5(x) = x^3 \\ f_3(x) = x^x & f_6(x) = e^x\cdot\ln x \end{array}$$

nach dem Wachstum für $x\to\infty$*. Beweisen Sie Ihre Behauptung.*

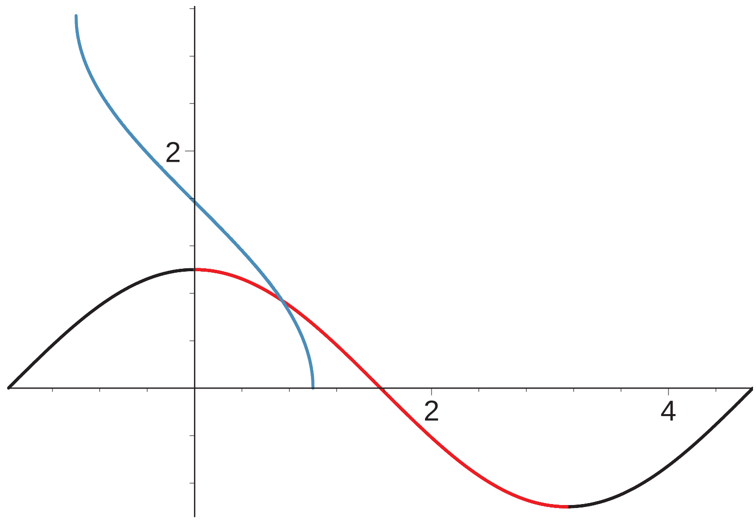


Abbildung 9.5: Cosinus und Arcuscosinus

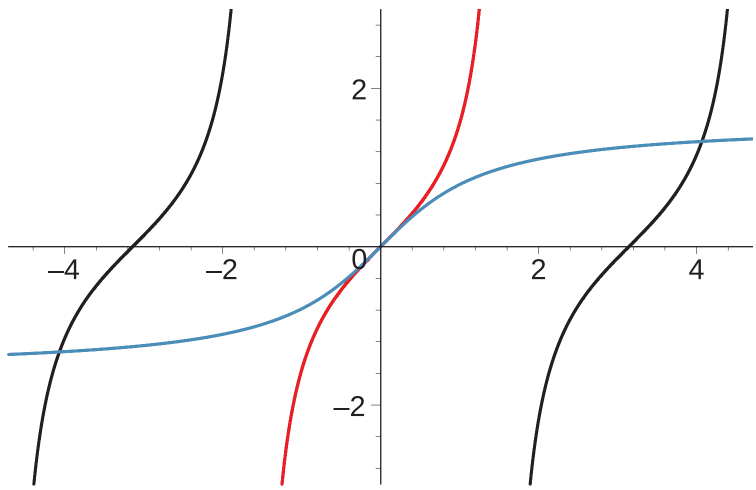


Abbildung 9.6: Tangens und Arcustangens

10

Integralrechnung

10.1 Übersicht

Lassen wir ein Objekt im Schwerefeld der Erde fallen, dann unterliegt es (unter idealisierten Bedingungen, d.h. ohne Reibung) einer konstanten Beschleunigung von $g = 9.81 m/s^2$, d.h. wenn $f(x)$ die Position des Objekts zur Zeit x und somit $f'(x)$ die Geschwindigkeit bezeichnet, dann gilt

$$f''(x) = g.$$

Dies ist wieder eine Differenzialgleichung. Um deren Lösung zu finden, müssen wir aus der Ableitung einer Funktion den Funktionswert bestimmen. Diesen Prozess bezeichnet man als Integration. Da

$$(f'(x) - g \cdot x)' = f''(x) - g = 0$$

gilt, ist nach Corollar 8.7.3

$$f'(x) - g \cdot x = c$$

konstant gleich $c \in \mathbb{R}$, d.h.

$$f'(x) = g \cdot x + c.$$

Dabei ist $c = f'(0)$ die Geschwindigkeit des Objekts zur Zeit $x = 0$. Ebenso gilt

$$(f(x) - g \cdot \frac{x^2}{2} - c \cdot x)' = 0$$

also
$$f(x) = g \cdot \frac{x^2}{2} + c \cdot x + d$$
mit einer Konstanten $d \in \mathbb{R}$. Diese erhalten wir als die Position $d = f(0)$ des Objekts zur Zeit $x = 0$.

Für $d = 0$ und $c = 0$ zeigt Abbildung 10.1 die Beschleunigung $f''(x)$, die Geschwindigkeit $f'(x)$ und die Position $f(x)$ des Objekts zur Zeit x (in den Einheiten $\frac{m}{s^2}$, $\frac{m}{s}$ und m). Dieses hat nach

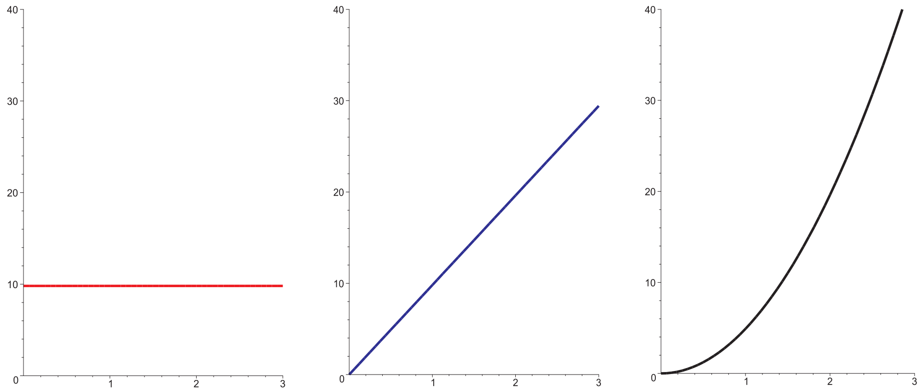


Abbildung 10.1: Beschleunigung, Geschwindigkeit und Position eines fallenden Objekts

10 Sekunden beispielsweise
$$9.81 m/s^2 \cdot \frac{(10s)^2}{2} = 490.5m$$
zurückgelegt.

Man kann also offenbar aus der Ableitung die Funktion bis auf eine Konstante (die ja beim Ableiten wegfällt) bestimmen. Diesen Prozess wollen wir im Folgenden genauer untersuchen. Insbesondere stellt sich die Frage, für welche Funktionen das Verfahren anwendbar ist.

10.2 Riemannintegral

Definition 10.2.1 *Eine Funktion $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ heißt* ***Treppenfunktion****, wenn es eine Unterteilung $r = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n =$*

s des Intervalls $[r, s]$ gibt, sodass f auf allen $]t_{i-1}, t_i[$ konstant ist.

*Das **Riemannintegral** (oder einfach Integral) von f ist definiert als*

$$\int_r^s f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

wobei $c_i \in]t_{i-1}, t_i[$ beliebig.

An die Funktionswerte $f(t_i)$ stellen wir keine Bedingung, und diese spielen auch keine Rolle für das Integral. Anschaulich macht das Sinn, da die Fläche unter einem einzelnen Punkt gleich $0 \cdot f(t_i) = 0$ ist.

Beispiel 10.2.2 *Sowohl Abbildung 10.2 als auch Abbildung 10.3 zeigen eine Treppenfunktion.*

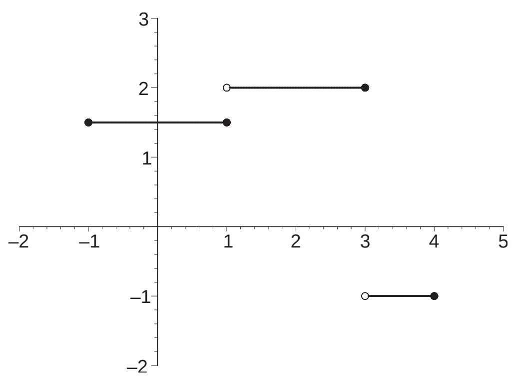


Abbildung 10.2: Treppenfunktion

Das Riemannintegral ist gleich der Fläche unter dem Funktionsgraphen, wobei Bereiche mit negativem Funktionswert auch negativ zählen. Beispielsweise hat die Treppenfunktion f in Abbildung 10.4 das Integral

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 6.$$

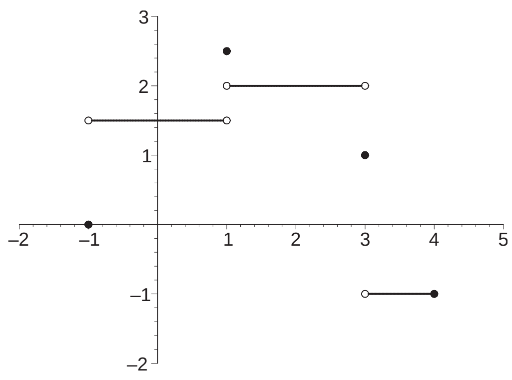


Abbildung 10.3: Auch eine Treppenfunktion

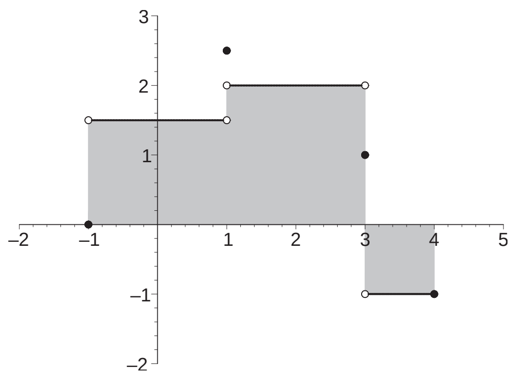


Abbildung 10.4: Integral einer Treppenfunktion

Definition 10.2.3 *Sei $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sei*

$$O = \inf\left\{\int_r^s g(x) \mid g : [r,s] \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion mit } g(x) \geq f(x) \forall x\right\}$$

*das Infimum aller **Obersummen** und*

$$U = \sup\left\{\int_r^s g(x) \mid g : [r,s] \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion mit } g(x) \leq f(x) \forall x\right\}$$

*das Supremum aller **Untersummen**. Die Funktion f heißt **Riemann-integrierbar** (oder einfach integrierbar) auf $[r,s]$, wenn*

$$O = U$$

und wir bezeichnen diese Zahl mit

$$\int_r^s f(x)dx$$

Beispiel 10.2.4 *Wir zeigen, dass* $\exp(x)$ *auf* $[0,1]$ *integrierbar ist mit*

$$\int_0^1 \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(0).$$

Beweis. Für festes $n \in \mathbb{N}$ bilden wir mittels der **äquidistanten Unterteilung**

$$t_i = \frac{i}{n},\ i = 0, ..., n$$

Treppenfunktionen, die $\exp(x)$ von oben und unten beschränken. Mit der geometrischen Summenformel (Lemma 5.4.13) können wir die Untersumme

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp(\frac{1}{n})^i = \frac{1}{n}\frac{1-\exp(\frac{1}{n})^n}{1-\exp(\frac{1}{n})} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1-\exp(1)}{1-\exp(\frac{1}{n})} \end{aligned}$$

berechnen, wobei $\exp(\frac{1}{n})^n = 1$ nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Corollar 6.5.12). Im Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \exp(1) - 1,$$

denn mit der Regel von l'Hospital ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\exp(\frac{1}{n}) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\exp(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\exp(x)} = 1.$$

Ebenso erhalten wir eine Obersumme

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \exp(\frac{1}{n})^{i+1} = \frac{1}{n}\exp(\frac{1}{n})\frac{1-\exp(1)}{1-\exp(\frac{1}{n})} \end{aligned}$$

also mit $\lim_{n\to\infty} \exp(\frac{1}{n}) = 1$ wieder

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \exp(1) - 1.$$

Wir haben somit eine Folge von Obersummen und eine Folge von Untersummen gefunden, die beide gegen $\exp(1) - 1$ konvergieren. Da außerdem

$$O_n = \exp(\frac{1}{n})U_n > U_n$$

folgt $O = U = \exp(1) - 1$. ■

Die Abbildungen 10.5 und 10.6 zeigen die im Beispiel verwendeten Ober- und Untersummen der Exponentialfunktion für $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$.

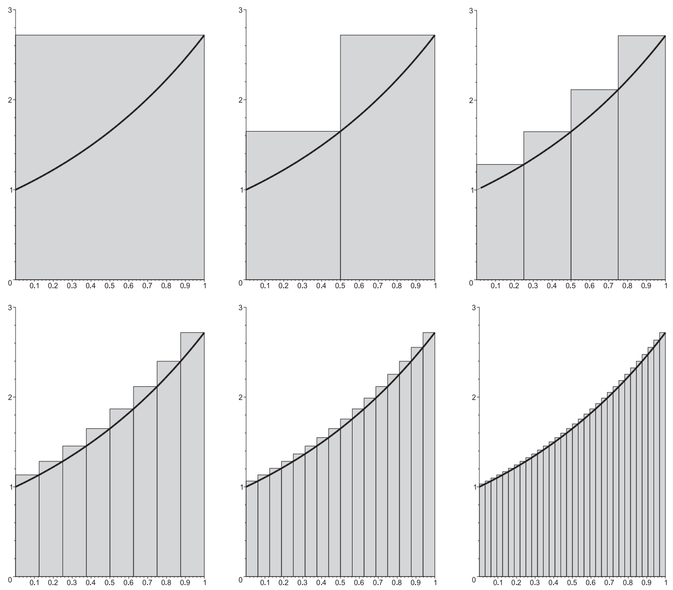


Abbildung 10.5: Obersummen der Exponentialfunktion.

Wie bei Treppenfunktionen gibt also das Integral eine mathematisch exakte Definition für die Fläche unter dem Funktionsgraphen, siehe Abbildung 10.7. Das Beispiel illustriert ein allgemeines Prinzip:

Bemerkung 10.2.5 *Jede Obersumme (oder Untersumme) können wir als Näherung für das Integral betrachten. Diese lässt*

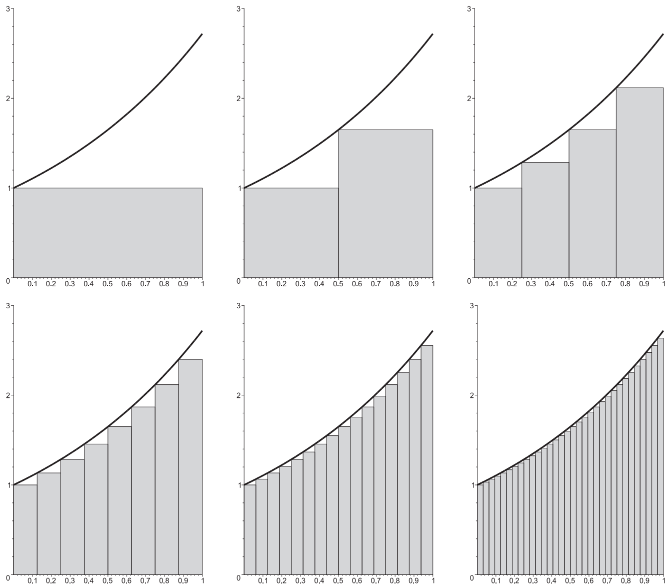


Abbildung 10.6: Untersummen der Exponentialfunktion.

sich durch Verfeinern der Unterteilung des Integrationsintervalls verbessern. Damit erhalten wir ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Integralen. Allerdings gibt es dafür wesentlich effizientere Algorithmen. Beispielsweise können wir das arithmetische Mittel einer Ober- und Untersumme verwenden. Allgemein verwendet man statt Treppenfunktionen andere Klassen von Funktionen, die die gegebene Funktion genauer approximieren. Statt Treppenfunktionen (die stückweise konstant sind), kann man z.B. auch Funktionen betrachten, die stückweise durch Polynome höheren Grades gegeben sind.

Es ist naheliegend, dass für das Riemannintegral das Folgende gilt:

Satz 10.2.6 *Seien $f, g : [r, s] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Es gilt:*

1) *Linearität des Integrals:*

$$\int_r^s (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))dx = \lambda \cdot \int_r^s f(x)dx + \mu \cdot \int_r^s g(x)dx$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

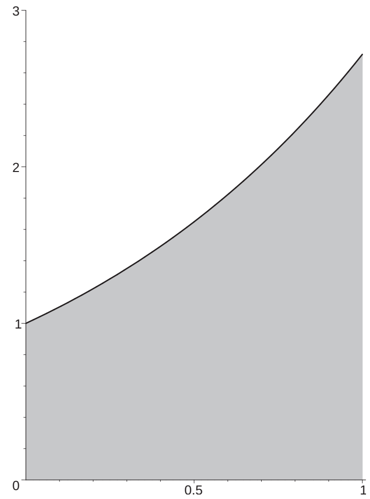


Abbildung 10.7: Integral der Exponentialfunktion

2) Additivität des Integrals:

$$\int_r^s f(x)dx = \int_r^t f(x)dx + \int_t^s f(x)dx.$$

für alle $t \in [r, s]$

3) Monotonie des Integrals: Ist $f(x) \le g(x)$ *für alle* x*, dann*

$$\int_r^s f(x)dx \le \int_r^s g(x)dx.$$

Die Beweise sind relativ technisch, deshalb wollen wir sie hier nicht geben, sonderen nur beispielhaft erläutern:

Beispiel 10.2.7 *Abbildung 10.8 illustriert die Linearität (und ebenso die Monotonie) anhand der Gleichung*

$$\int_0^1 (x + x^2)\ dx = \int_0^1 x\ dx + \int_0^1 x^2\ dx.$$

Mit Additivität gilt zum Beispiel

$$\int_0^2 x^2\ dx = \int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 x^2\ dx,$$

siehe dazu Abbildung 10.9.

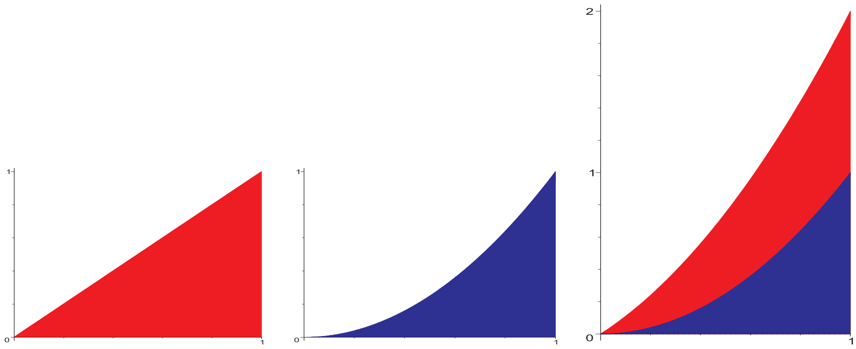


Abbildung 10.8: Linearität des Integrals

Ebenso naheliegend ist, dass für stetige Funktionen Obersumme und Untersumme übereinstimmen:

Satz 10.2.8 *Stetige Funktionen sind integrierbar.*

Insbesondere erhalten wir durch Satz 7.3.5 eine Vielzahl integrierbarer Funktionen. Allerdings ist nicht jede Funktion integrierbar:

Beispiel 10.2.9 *Sei* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

und g *eine Treppenfunktion mit* $g(x) \geq f(x)$ *für alle* x*. Da es in jedem Intervall* $]t_i, t_{i+1}[$ *rationale Zahlen gibt (nach Satz 5.4.22) muss gelten* $g(x) \geq 1$ *für alle* x*, also* $O = 1$*.*

Umgekehrt gibt es in $]t_i, t_{i+1}[$ *auch irrationale Zahlen, etwa von der Form* $r = t_i + 10^{-k}\sqrt{2}$*, wobei wir wegen* $\lim_{k\to\infty} 10^{-k} = 0$ *ein* k *wählen können mit* $r < t_{i+1}$*. Somit gilt für jede Treppenfunktion* g *mit* $g(x) \leq f(x)$ *für alle* x*, dass* $g(x) \leq 0$*, also* $U = 0$*.*

Wegen $U = 0 \neq 1 = O$ *ist* f *also nicht Riemann-integrierbar (und nach Satz 10.2.8 somit auch nicht stetig).*

Auch den folgenden Satz wollen wir nicht beweisen, sondern nur durch ein Beispiel veranschaulichen:

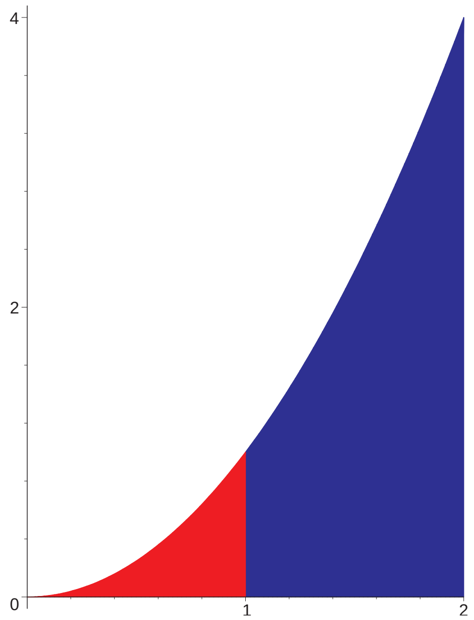


Abbildung 10.9: Additivität des Integrals.

Satz 10.2.10 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist* $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion, dann gibt es ein* $a \in [r, s]$ *mit*

$$\int_r^s f(x)dx = (s - r) \cdot f(a).$$

Beispiel 10.2.11 *Für* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ *ist wegen der Symmetrie der Funktion die Fläche unter dem Graphen gleich* $2 \cdot 1$, *denn die beiden roten Bereiche in Abbildung 10.10 haben dieselbe Fläche. Somit gilt*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = (1 - (-1)) \cdot f(0).$$

10.3 Stammfunktionen und Hauptsatz

Wie schon in der Einleitung diskutiert wollen wir den Ableitungsprozess umkehren. Deshalb definieren wir:

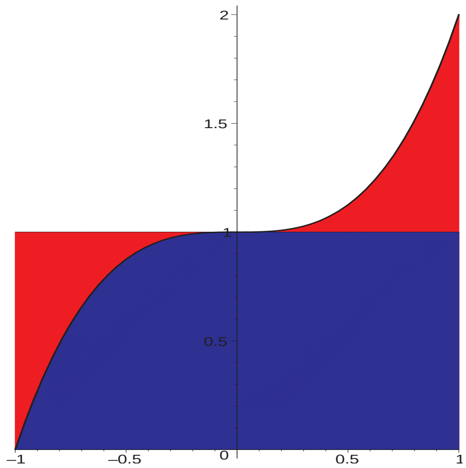


Abbildung 10.10: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Definition 10.3.1 *Eine* ***Stammfunktion*** *einer Funktion* $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ *ist eine differenzierbare Funktion* $F : [r,s] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F' = f$$

Die Funktion f beschreibt also die Steigung der Stammfunktion F. Mit Hilfe des Riemannintegrals und des Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhalten wir das folgende Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für Stammfunktionen, den sogenannten **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Er gibt uns außerdem eine Methode, um ein Integral mit Hilfe einer Stammfunktion zu berechnen: Die Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion F bei r und s gibt das Integral von f zwischen r und s, d.h. die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f zwischen r und s.

Satz 10.3.2 *Sei* $f : [r,s] \to \mathbb{R}$ *stetig.*

1) Die Funktion $F : [r,s] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(x) = \int_r^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f*.*

2) *Sind F und G Stammfunktionen von f, so ist $F - G$ konstant.*

3) *Für jede Stammfunktion F von f gilt*

$$\int_r^s f(t)dt = F(s) - F(r).$$

Beweis.

1) Sei (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in [r,s]$ und $x_n \neq a$ für alle n. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} &= \frac{1}{x_n - a}\left(\int_r^{x_n} f(t)dt - \int_r^a f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{x_n - a}\int_a^{x_n} f(t)dt\end{aligned}$$

mit der Additivität des Integrals (Satz 10.2.6). Der Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt ein b_n zwischen a und x_n mit

$$\frac{1}{x_n - a}\int_a^{x_n} f(t)dt = f(b_n).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Da f nach Voraussetzung stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) - F(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(a).$$

2) Da $(F - G)' = 0$, folgt die Behauptung direkt aus Corollar 8.7.3.

3) Sei F eine Stammfunktion von f. Nach (1) und (2) gilt

$$\int_r^x f(t)dt - F(x) = c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $x = s$ und $x = r$ gibt

$$\int_r^s f(t)dt = F(s) + c$$

und

$$0 - F(r) = c.$$

■

Notation 10.3.3 *Wir schreiben kurz*

$$\int f \ dx$$

für jede Stammfunktion von f und

$$[F(x)]_r^s = F(s) - F(r).$$

Nach Satz 10.3.2 gibt jede Ableitungsregel eine Integrationsregel:

Beispiel 10.3.4 *Nach Beispiel 8.2.3 ist*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1},$$

nach Beispiel 8.4.3 gilt

$$\int \exp(x) dx = \exp(x)$$

und nach Beispiel 8.4.4 erhalten wir

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$
$$\int \cos(x) dx = \sin(x).$$

Beispiel 10.3.5 *Die Funktion*

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

Beweis. Für $x > 0$ gilt nach Beispiel 9.5.3

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

und auch für $x < 0$ ist mit der Kettenregel 8.3.4

$$\ln'(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

■

Beispiel 10.3.6 *Aus* $\int \exp(x)dx = \exp(x)$ *folgt mit dem* 3. *Teil des Hauptsatzes 10.3.2, dass*

$$\int_0^1 \exp(x)dx = \exp(1) - \exp(0),$$

in Übereinstimmung mit dem direkt berechneten Riemannintegral aus Beispiel 10.2.4.

Beispiel 10.3.7 *Für die Funktion*

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

in Abbildung 10.11 ist

$$\int_0^x f(t)dt = F(x) := \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

denn $F' = f$ *und* $F(0) = 0 = \int_0^0 f(t)dt$.

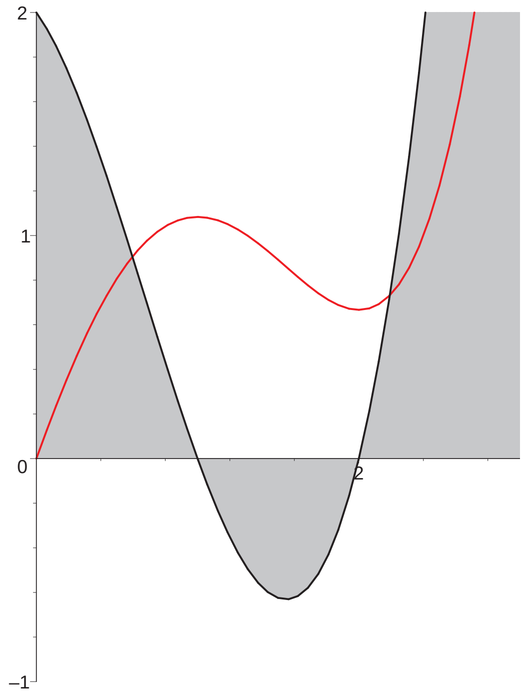


Abbildung 10.11: Funktion und Stammfunktion

Bemerkung 10.3.8 *Die Stammfunktion ist nach dem Hauptsatz nur eindeutig bis auf eine Konstante. Zum Beispiel sind also alle möglichen Stammfunktionen von* $f(x) = 3x^2$ *von der Form* $F(x) = x^3 + c$ *mit einer beliebigen Konstanten* $c \in \mathbb{R}$. *Alle diese Funktionen kann man zum Integrieren von* f *verwenden, z.B. ist*

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\ dx &= F(1) - F(0)\\ &= (1+c) - (0+c)\\ &= 1 - 0 = 1,\end{aligned}$$

denn c *kürzt sich in der Differenz. Abbildung 10.12 illustriert diese Rechnung für* $c = 4$.

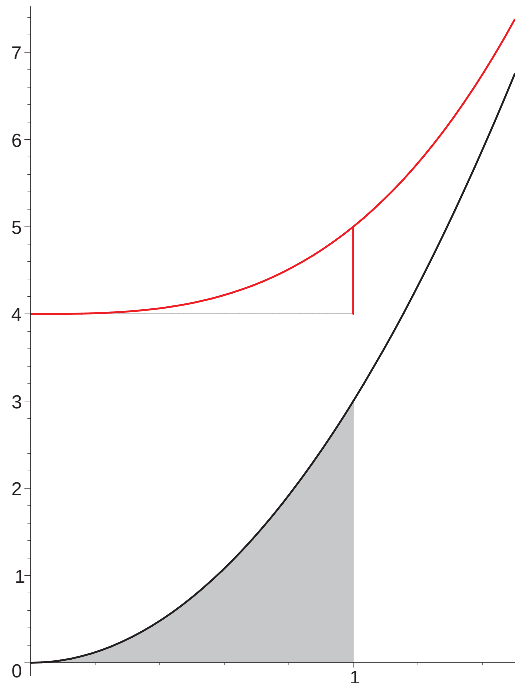


Abbildung 10.12: Berechnung eines Integrals mit dem Hauptsatz

Bemerkung 10.3.9 Maple *kennt eine Vielzahl von Stammfunktionen und berechnet so mittels Satz 10.3.2 Integrale, zum Beispiel erhalten wir eine Stammfunktion des Sinus durch*

```
int(sin(x),x);
```
$-\cos(x)$

und berechnen damit das Integral

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x)dx &= [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

mit dem Befehl:

```
int(sin(x),x=0..Pi);
```
2

10.4 Integrationsregeln

Satz 10.4.1 (Substitutionsregel) *Ist $f : [r, s] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to [r, s]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, dann gilt*

$$\int_r^s (f \circ g) \cdot g' \ dx = \int_{g(r)}^{g(s)} f(x) \ dx.$$

Mittels einer Stammfunktion h von f schreiben wir auch

$$\int (h' \circ g) \cdot g' \ dx = h \circ g.$$

Beweis. Nach der Kettenregel 8.3.4 ist

$$(h \circ g)' = (h' \circ g) \cdot g'$$

also ist die Komposition $h \circ g$ eine Stammfunktion von $(h' \circ g) \cdot g'$. Da nach Voraussetzung und Satz 7.3.5 diese Funktion stetig ist, folgt nach Satz 10.3.2

$$\int_r^s (h' \circ g) \cdot g' \ dx = [h]_{g(r)}^{g(s)}.$$

Mit $f = h'$ erhalten wir die Behauptung. ∎

Beispiel 10.4.2 *Beispiel 10.3.5 und die Kettenregel angewendet auf $h(x) = \ln|x|$ gibt*

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \ dx = \ln|g(x)|,$$

wobei wir damit nur über Intervalle integrieren dürfen, auf denen g keine Nullstelle hat.

Beispielsweise erhalten wir mit dieser Formel

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = -\ln\cos(x).$$

Auch MAPLE *kennt die Substitutionsregel:*

```
int(sin(x)/cos(x),x);
```

$-\ln\cos(x)$

Für weitere Beispiele siehe die Übungsaufgaben 10.2, 10.3 und 10.4.

Satz 10.4.3 (Partielle Integration) *Seien $f, g : [r, s] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit stetiger Ableitung. Dann gilt*

$$\int_r^s f(x) \cdot g'(x)\ dx + \int_r^s f'(x) \cdot g(x)\ dx = [f(x) \cdot g(x)]_r^s .$$

Für die Stammfunktionen schreibt man auch

$$\int f \cdot g'\ dx + \int f' \cdot g\ dx = f \cdot g$$

Beweis. Mit der Produktregel in Satz 8.3.1 gilt

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

also ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f \cdot g' + f' \cdot g$. Da nach Voraussetzung und Satz 7.3.5 diese Funktion stetig ist, folgt mit dem Hauptsatz 10.3.2, dass

$$\int_r^s (f \cdot g' + f' \cdot g) \ \ = [f \cdot g]_r^s$$

und somit die Behauptung mit der Linearität des Integrals (Satz 10.2.6). ■

Beispiel 10.4.4 *Mit partieller Integration erhalten wir*

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\ dx = \int \ln(x) \cdot 1\ dx &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x\end{aligned}$$

In MAPLE *können wir eine Stammfunktion des Logarithmus berechnen durch*

```
int(ln(x),x);
```

$x \cdot \ln(x) - x$

Für weitere Beispiele siehe die Übungsaufgaben 10.1–10.5.

10.5 Übungsaufgaben

Übung 10.1 *Berechnen Sie mit partieller Integration Stammfunktionen*

$$\int x^n \exp(x)$$
$$\int x^n \sin(x)$$
$$\int x^n \cos(x)$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Übung 10.2 *Berechnen Sie folgende Integrale*

$$\int_1^2 x\,(2x-3)^{100}\,dx$$
$$\int_1^e x^5 \ln x dx$$

Übung 10.3 *Bestimmen Sie Stammfunktionen von*

$$f_1(x) = \sin(2x)\, e^{\sin x}$$
$$f_2(x) = \sin(\ln x)$$
$$f_3(x) = \frac{2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Übung 10.4 *Berechnen Sie die Fläche* 1

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$

des Halbkreises mit Radius mittels der Substitution

$$x = \sin t.$$

Siehe Abbildung 10.13.

Übung 10.5 *1) Bestimmen Sie Stammfunktionen*

$$\int (\cos(x))^2\ dx$$
$$\int (\cos(x))^3\ dx$$

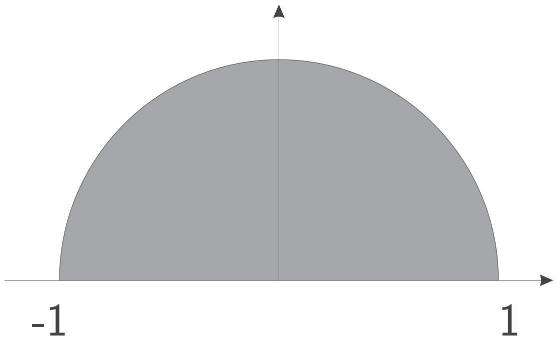


Abbildung 10.13: Berechnung der Fläche eines Halbkreises

2) Stellen sie eine Rekursionsgleichung auf für

$$\int (\cos(x))^k \, dx$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

11

Anhang: Computeralgebra

Für die Kombinatorik, Analysis und elementares Programmieren ist ein Computeralgebrasystem mit allgemeiner Funktionalität am besten geeignet, da es alle drei Themengebiete gemeinsam abdeckt. Im kommerziellen Bereich sind Maple [8], und Mathematica [10] verfügbar, ebenso die Open-Source-Systeme Maxima [9], Reduce [13], und Axiom [1], die allerdings einen deutlich kleineren Funktionsumfang besitzen.

Speziell für die Anwendung in der Algebra (exaktes Rechnen) gibt es deutlich leistungsfähigere Systeme, wie z.B. die Open-Source-Systeme Singular [14], Macaulay2 [4] und GAP [3], und das kommerzielle System Magma [5]. Dasselbe gilt für die Numerik (Rechnen mit floating point Zahlen), in der Matlab [11] den Standard darstellt.

Wir wollen zunächst ausgehend von einfachen Fragestellungen einen kurzen Überblick über Maple geben, das sowohl in der Kombinatorik als auch in der Analysis eine umfangreihe Funktionalität bereitstellt.

11.1 Maple

Maple kann sowohl in der Kommandozeile als auch in einem graphischen Frontend verwendet werden. Die Ausgabe von Graphik ist natürlich nur in letzterem möglich, wobei die Kommandozeilenversion Graphiken in Dateien schreiben kann. In beiden Benutzeroberflächen folgt Output auf Input. Eine neue Zeile für mehrzeiligen Input erhält man durch `Shift-Return`, ein neues

Eingabefeld durch `Strg-j`. Jeder Befehl wird mit einem Strichpunkt abgeschlossen und durch `Return` ausgewertet. Ersetzt man den Strichpunkt durch einen Doppelpunkt wird der Output unterdrückt. Durch `quit;` verlassen wir MAPLE.
Zuweisungen erfolgen mit:

```
i:=0;
0
```

Bedingte Anweisungen haben folgende Syntax:

```
if i=0 then print(null");fi;
null"
```

Mengen erzeugt man durch geschweifte Klammern:

```
M:={1,1,2,3,2};
M:={1,2,3}
```

und Listen durch eckige Klammern:

```
L:=[1,1,2,3,-1];
L:=[1,1,2,3,-1]
```

An eine Liste hängt man an durch

```
L:=[op(L),2];
L:=[1,1,2,3,-1,2]
```

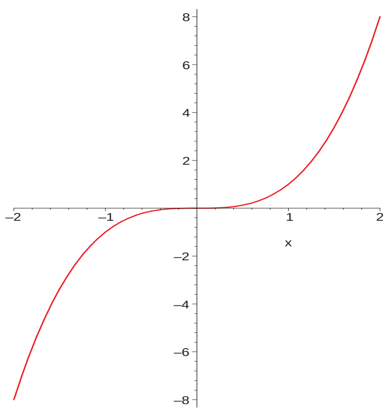
und genauso für Mengen.

Abbildungen (oder Prozeduren) werden auf die Elemente einer Menge oder die Einträge einer Liste angewendet durch:

```
map(x->x^2,L);
[1, 1, 4, 9, 1, 4]
```

Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich plotten mit:

```
plot(x^3, x=-2..2);
```



Die Ausgabe wird nach dem Befehl

```
plotsetup(jpeg, plotoutput=‘plot.jpg‘, plotoptions
                              =‘portrait,noborder,color‘);
```

in eine Datei umgeleitet. Für eine Postscript-Ausgabe kann man jpeg durch ps ersetzen. Auf dem Bildschirm werden Plots wieder ausgegeben nach:

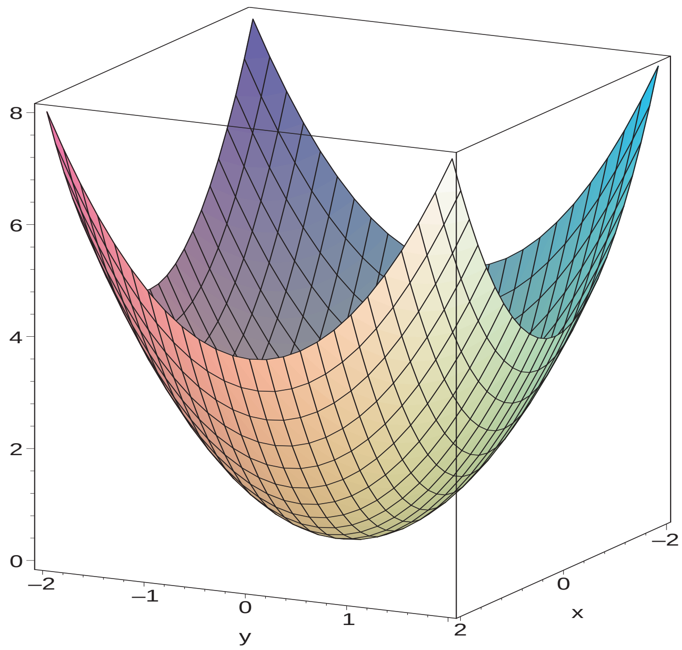
```
plotsetup(default);
```

Den Graphen der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

erhalten wir mit:

```
plot3d(x^2+y^2, x=-2..2,y=-2..2);
```



Bei der graphischen Ausgabe sind viele Optionen verfügbar, siehe dazu die Hilfe-Funktion unter `plot,options`.

Ein Beispiel für eine Prozedur, die

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

berechnet ist (lokale Variablen werden mit `local` deklariert):

```
summe:=proc(n)
  local k,s;
```

```
    s:=0;
    for k from 1 to n do
        s:=s+k;
    od;
    return(s);
end proc:
```

Damit erhalten wir:

```
summe(5);
15
```

Tatsächlich gibt es eine Funktion die Summen und Produkte direkt auswertet:

```
sum(k,k=1..5);
15
```

gibt

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

und

```
product(k,k=1..5);
120
```

liefert

$$\prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Dies funktioniert (in vielen Fällen) auch für unbestimmte Grenzen:

```
sum(k,k=1..n);
```

$\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$

Durch Vereinfachen mit der sehr mächtigen Funktion `simplify` sieht man, dass die Formel mit der in Satz 1.3.4 bewiesenen übereinstimmt (wobei sich `%` auf die letzte Ausgabe bezieht):

```
simplify(%);
```

$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Man kann auch Summenformeln eingeben, ohne sie auszuwerten

s:=`Sum(k,k=1..n);`

$s := \sum_{k=1}^{n} k$

damit weiterrechnen, z.B. n durch einen konkreten Wert ersetzen

s:=`subs(n=5,s);`

$s := \sum_{k=1}^{5} k$

und schließlich die Formel auswerten:

```
value(s);
15
```

In der Division mit Rest von a durch b mit Rest r

$$a = q \cdot b + r$$

erhalten wir q und r in MAPLE wie folgt, z.B. für $a = 36$ und $b = 15$:

```
iquo(36,15);
2
irem(36,15);
6
```

Diese Funktionen können Sie verwenden, um in Aufgabe 2.13 eine Prozedur zur Berechnung der Binärdarstellung zu schreiben. Vergleichen Sie auch mit der schon vorhandenen Funktion:

```
convert(23,binary);
10111
```

Weitere Anwendungsbeispiele werden wir jeweils in Zusammenhang mit den theoretischen Resultaten diskutieren.

11.2 Singular

Das Computeralgebrasystem SINGULAR [14] ist spezialisiert auf das Rechnen mit polynomialen Gleichungssystemen. Ein Beispiel ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x^2 - xy + 2y^2 - 2 &= 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

das den Durchschnitt von zwei Ellipsen beschreibt. Mathematisch wird ein solches Gleichungssystem durch ein Ideal in einem Polynomring dargestellt, hier etwa das Ideal

$$I = \left\langle 2x^2 - xy + 2y^2 - 2,\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2 \right\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y].$$

Der Grund hierfür ist der folgende: Wenn (x, y) eine Nullstelle von $f(x, y)$ und $g(x, y)$ ist, dann auch von

$$a(x, y) \cdot f(x, y) + b(x, y) \cdot g(x, y)$$

für alle $a, b \in \mathbb{Q}[x, y]$. Ein solches Ideal hat viele verschiedene Erzeugendensysteme. Der in SINGULAR implementierte Gröbnerbasen-Algorithmus findet ein äquivalentes leichter lösbares System (eine sogenannte Gröbnerbasis von I). Dabei geht er analog zum Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme vor, indem er Variablen elmininiert:

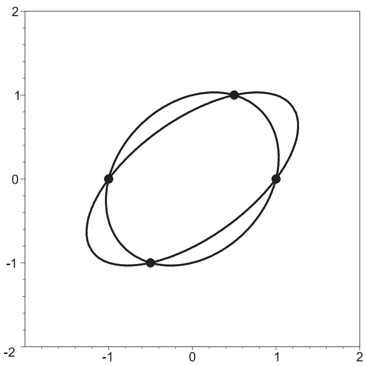
```
ring R=0,(y,x),lp;
ideal I = 2x2-xy+2y2-2, 2x2-3xy+3y2-2;
std(I);
_[1]=4x4-5x2+1
_[2]=3y+8x3-8x
```

Dies zeigt, dass

$$\begin{array}{r} 2x^2 - xy + 2y^2 - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 - 2 = 0 \end{array} \iff \begin{array}{r} 3y + 8x^3 - 8x = 0 \\ 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \end{array}$$

In dem äquivalenten System können wir die zweite Gleichung nach x lösen und dann in die erste Gleichung einsetzen und erhalten die Lösungsmenge

$$V(I) = \{(1,0), (-1,0), (\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1)\}.$$



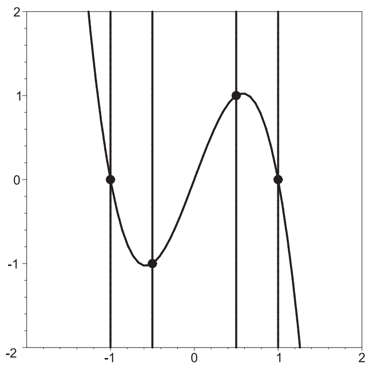


Abbildung 11.1: Gröbnerbasen-Algorithmus für den Schnitt von zwei Ellipsen

Neben dem Buchberger-Algorithmus sind in SINGULAR noch viele weitere Algorithmen zum Lösen und Analysieren von polynomialen Gleichungssystemen implementiert. Insgesamt umfasst das System über hundert spezialisierte Bibliotheken.

Index

Literaturverzeichnis

[1] The Axiom Group: *Axiom*, http://www.axiom-developer.org/ (2012).

[2] O. Forster: *Analysis I*, Vieweg (2010).

[3] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*; http://www.gap-system.org, (2008).B. Kreußler, G. Pfister: Mathematik für Informatiker: Algebra, Analysis, Diskrete Strukturen, Springer (2009).

[4] Grayson, D. R.; Stillman, M. E.: *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*, available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/ (2009).

[5] Bosma, W.; Cannon J.; Playoust C.: *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput., 24 (1997), 235–265.

[6] K. Königsberger: *Anaysis I*, Springer (2008).

[7] B. Kreußler, G. Pfister: *Mathematik für Informatiker: Algebra, Analysis, Diskrete Strukturen*, Springer (2009).

[8] Maple (Waterloo Maple Inc.): Maple 16, http://www.maplesoft.com/ (2012).

[9] Maxima: *Maxima, a Computer Algebra System.* Version 5.25.1, available at http://maxima.sourceforge.net/ (2011).

[10] Wolfram Research, Inc.: *Mathematica Edition: Version 7.0* (2008).

[11] MATLAB. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., http://www.mathworks.de/products/matlab/ (2013).

[12] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/.

[13] Hearn, A. C.: *REDUCE 3.8*, available at http://reduce-algebra.com/ (2009).

[14] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR *3-1-6 — A computer algebra system for polynomial computations*. http://www.singular.uni-kl.de (2013).