Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 9

Abgabetermin Donnerstag, den 06.01.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 3.7 – 3.10 im Vorlesungsmanuskript.

1. Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen.

   (a) Zeigen Sie, dass es unendlich viele irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_q[x]$ gibt, indem Sie Euklids Beweis für $\mathbb{Z}$ (Satz 1.2.4 im Skript) auf den Polynomring $\mathbb{F}_q[x]$ übertragen. Lässt sich auch Eulers Beweis (Übungsaufgabe 1.3 im Skript) übertragen?

   (b) Bestimmen Sie alle normierten, irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{F}_2[x]$.

2. (a) Zeigen Sie: Das Ideal $(x, y) \subset K[x, y]$ ist kein Hauptideal.

   (b) Ist $\mathbb{Z}[x]$ ein Hauptidealring?

3. (a) Finden Sie alle größten gemeinsamen Teiler von $1 + 5i$ und $-1 + 5i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

   (b) Zeigen Sie für $n = -1, -2, 2, 3$, dass $R = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ zusammen mit

   $$\begin{array}{rlcl} d: & R\setminus\{0\} & \rightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & a + b\sqrt{n} & \mapsto & \left|(a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{n})\right| \end{array}$$

   ein euklidischer Ring ist. Geben Sie ein Verfahren an, um die Division mit Rest durchzuführen.

   (c) Bestimmen Sie einen Erzeuger des Ideals

   $$\left(11 + 8\sqrt{3}, 7 + 2\sqrt{3}\right) \subset \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$$

   (d) (4 Zusatzpunkte) Schreiben Sie ein Maple Programm, das in $R = \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, $n = -1, -2, 2, 3$ die Division mit Rest durchführt, und testen Sie Ihr Programm für obige Beispiele.

4. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{R}[x]$ aller Lösungen f der simultanen Kongruenzen

   $$f \equiv 2 + 3(x-1) \bmod (x-1)^2$$
   $$f \equiv 1 + 2(x+1) \bmod (x+1)^2$$

5. (4 Zusatzpunkte)

   (a) Sei K ein Körper und $(a_1, ..., a_n) \in K^n$. Zeigen Sie, dass

   $$I = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \subset K[x_1, ..., x_n]$$

   ein maximales Ideal ist.

   (b) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale von $\mathbb{R}[x]$.