Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 8

Abgabetermin Donnerstag, den 16.12.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 3.3 – 3.6 im Vorlesungsmanuskript.

1. Bestimmen Sie alle Elemente von
$$K = \mathbb{F}_2\,[x]\,/\,\left(x^2+x+1\right)$$
und die Additions- und Multiplikationstabelle von K. Zeigen Sie, dass K ein Körper ist. Welche Charakteristik hat K?

2. (a) Bestimmen Sie
$$I = \{f \in \mathbb{Q}\,[x] \mid f\,(0) = 0\}$$
und zeigen Sie, dass $I \subset \mathbb{Q}\,[x]$ ein maximales Ideal ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $I = (xy-1) \subset \mathbb{C}\,[x,y]$ ein Primideal ist.
   (c) Ist $\mathbb{F}_3\,[x]\,/\,(x^2+x+1)$ ein Integritätsring?

3. Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass
$$I = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\} \subset R$$
ein Ideal ist. Bestimmen Sie dieses für $R = \mathbb{Z}/\,(12)$.

4. Sei
$$R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}$$
   (a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$.
   (b) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei K ein Körper. Der formale Potenzreihenring $K[[x]]$ ist die Menge der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$ mit $f_i \in K$ (ohne irgendeine Konvergenzbedingung). Eine solche Reihe ist durch die Koeffizientenfolge
$$f : \mathbb{N}_0 \to K,\ j \mapsto f_j$$
eindeutig bestimmt. Somit steht $K[[x]]$ in Bijektion mit der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach K. Die Ringstruktur auf
$$K[[x]] = K^{\mathbb{N}_0} = \{f \mid f : \mathbb{N}_0 \to K \text{ Abbildung}\}$$
ist in Termen der Koeffizienten $f(j) = f_j$ gegeben durch komponentenweise Addition
$$f + g : \mathbb{N}_0 \to K \qquad (f+g)\,(j) = f(j) + g(j)$$
und Multiplikation
$$f \cdot g : \mathbb{N}_0 \to K \qquad (f \cdot g)\,(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) g(k-i)$$
für $f, g \in K[[x]]$. Zeigen Sie:
   (a) $K[[x]]$ ist ein kommutativer Ring mit 1.
   (b) $K[[x]]$ ist ein Integritätsring.
   (c) $K[[x]]^\times = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \mid f_0 \neq 0\right\}$.