Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 6

Abgabetermin Donnerstag, den 02.12.2010 vor der Vorlesung.

0. Gehen Sie Abschnitt 2 im Vorlesungsmanuskript durch und markieren Sie, was Sie in Ihre Klausurzusammenfassung aufnehmen wollen.

1. Geben Sie Primzahlen $p < q$ an, für die es eine nichtzyklische Gruppe der Ordnung pq gibt.

2. Seien p, q Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p \cdot q$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist, d.h. einen nicht-trivialen Normalteiler besitzt.

3. Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Bestimmen Sie die Anzahl der 3- und 5-Sylowuntergruppen von G.

4. Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ ein Körper mit p Elementen und

$$\mathrm{SL}\left(2, \mathbb{F}_p\right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_p,\ ab - cd = 1 \right\}$$

   Bestimmen Sie die Gruppenordnung von $\mathrm{SL}\left(2, \mathbb{F}_p\right)$, eine der p-Sylowuntergruppen und die Anzahl s_p der p-Sylowuntergruppen.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie:

   (a) A_5 hat eine Untergruppe der Ordnung 12.

   (b) Hat G eine Untergruppe der Ordnung 12, dann ist G schon isomorph zu A_5.

   (c) G ist isomorph zu A_5.